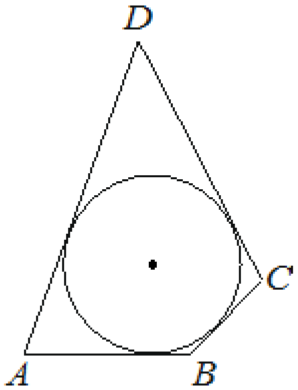
Тверской государственный университет
Математический факультет

Вариант 1

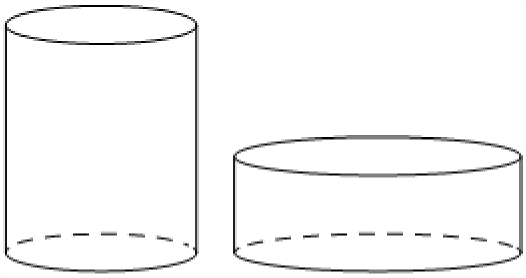
Часть 1

1. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=10$, $CD=17$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



2. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 3 и 7, а угол между ними равен 60°. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3. Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 18. У второго цилиндра высота в 3 раза меньше, а радиус основания в 2 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



4. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 23 пассажиров, равна 0,87. Вероятность того, что окажется меньше 14 пассажиров, равна 0,61. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 14 до 22 включительно.

5. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

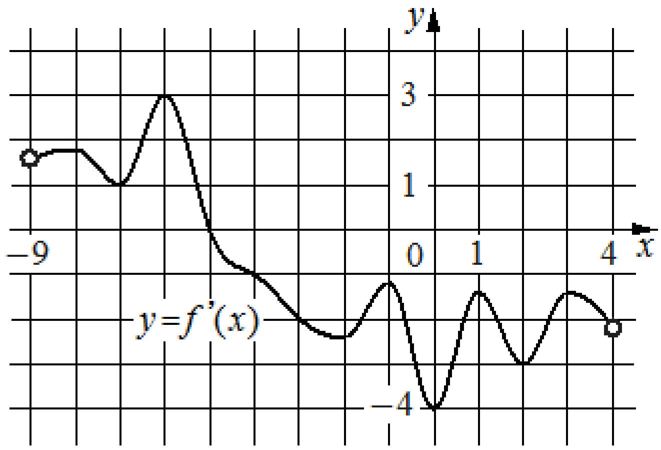
6. Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-15} = \frac{1}{64}.$$

7. Найдите значение выражения

$$5\sqrt{2}\cos^2\frac{7\pi}{8} - 5\sqrt{2}\sin^2\frac{7\pi}{8}.$$

8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



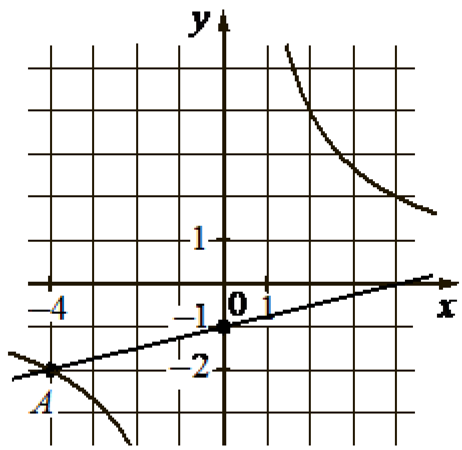
9. Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (в кг), время t (в с) и пройденный путь S (в м) связаны соотношением

$$F = \frac{2mS}{t^2}.$$

Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 2800 Н, масса автомобиля - 2100 кг, путь - 150 м.

10. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 30 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 18 км/ч больше скорости другого?

11. На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax + b$ и $g(x) = \frac{k}{x}$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



12. Найдите точку максимума функции $y = 9 \cdot ln(x + 4) - 18x - 7$.

Часть 2

13. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = \sqrt{33}$, все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AM – точка F так, что $MF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру MB.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость CEF пересекает грань AMD пирамиды.

15. Решите неравенство

$$2\log_2 \frac{x+2}{x-3{,}7} + \log_2(x-3{,}7)^2 \geq 2.$$

16. В июле планируется взять в банке некоторую сумму в кредит на три года.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года нужно внести платёж, равный 2,662 млн рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что долг был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

17. Дан треугольник ABC. Точка O – центр вписанной в него окружности. На стороне BC отмечена такая точка M , что $CM =$ AC и $BM = AO$.

а) Докажите, что прямые AB и ОM параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника ABMO, если $\angle ACB = 90°$ и $AC = 4$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x^2 - 4ax + 5a}$$

имеет ровно один корень.

19. Есть 16 монеток по 2 рубля и 29 монеток по 5 рублей.
а) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 175?
б) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 176?
в) Какое наименьшее количество монеток по 1 рублю нужно добавить в набор, чтобы можно было получить любую целую сумму от 1 до 180 включительно.

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

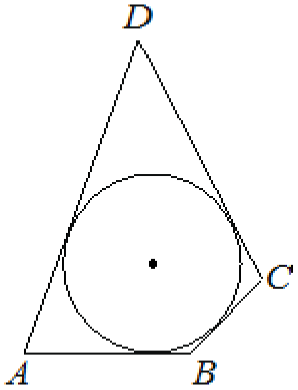
Тверской государственный университет

Математический факультет

Вариант 2

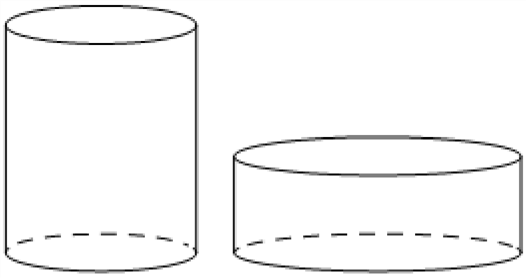
Часть 1

1. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AD=25,\ BC=10$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



2. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 5 и 9, а угол между ними равен 60°. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3. Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 15. У второго цилиндра высота в 3 раза меньше, а радиус основания в 2 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



4. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,75. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,52. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 17 включительно.

5. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

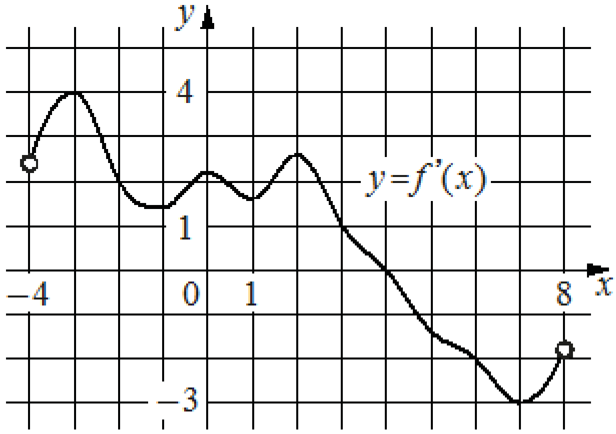
6. Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{x-3} = \frac{1}{36}.$$

7. Найдите значение выражения

$$3\sqrt{2}\cos^2\frac{9\pi}{8} - 3\sqrt{2}\sin^2\frac{9\pi}{8}.$$

8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



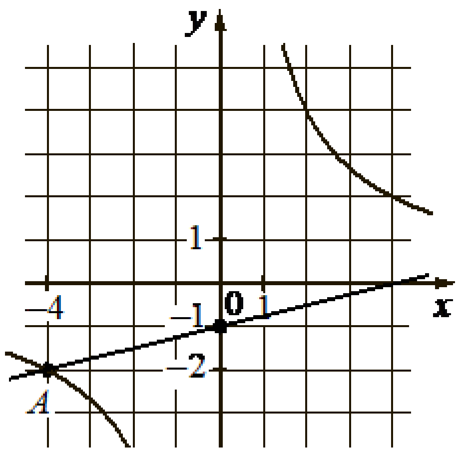
9. Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (в кг), время t (в с) и пройденный путь S (в м) связаны соотношением

$$F = \frac{2mS}{t^2}.$$

Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 2000 Н, масса автомобиля - 1500 кг, путь - 600 м.

10. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 16 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого?

11. На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax + b$ и $g(x) = \frac{k}{x}$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите ординату точки B.



12. Найдите точку максимума функции $y = ln(x + 2) - 5x + 13$.

Часть 2

13. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = \sqrt{33}$, все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на рёбрах AM и AB – точки F и G соответственно так, что $MF = BE = BG = 3$.

а) Докажите, что плоскость GEF проходит через точку C.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость GEF пересекает грань CMD пирамиды.

15. Решите неравенство

$$2\log_2 \frac{x-1}{x+1{,}3} + \log_2 (x+1{,}3)^2 \geq 2.$$

16. В июле планируется взять в банке некоторую сумму в кредит на три года.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года нужно внести платёж, равный 2,592 млн рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что долг был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

17. Дан треугольник ABC. Точка O – центр вписанной в него окружности. На стороне BC отмечена такая точка M , что $CM =$ AC и $BM = AO$.

а) Докажите, что прямые AB и OM параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABMO$, если $\angle ACB = 90°$ и $AC = 6$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x^2 - 4ax + 5a}$$

имеет ровно один корень.

19. Есть 24 монет по 2 рубля и 30 монеток по 5 рублей.
а) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 196?
б) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 197?
в) Какое наименьшее количество монеток по 1 рублю нужно добавить в набор, чтобы можно было получить любую целую сумму от 1 до 200 включительно.

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответы к заданиям 1-12

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вариант 1	54	10,5	24	0,26	0,048	18	5	3	15	50	8	-3,5
Вариант 2	70	22,5	20	0,23	0,059	5	3	3	30	48	1	-1,8

Задание 13 (вариант 1)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	**2**
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за (одной) вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	**0**

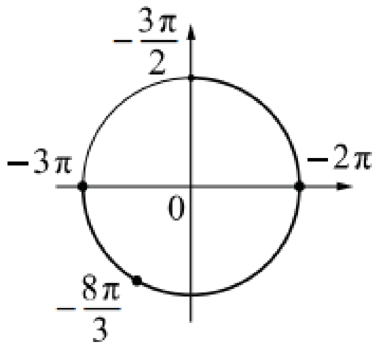
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2\sin x\cos x = -\sin x; \quad \sin x\cdot(2\cos x+1)=0.$$

Значит, либо $\sin x = 0$, откуда следует, что $x=\pi k$, $k\in Z$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда следует, что $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$, или $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа -3π; $-\frac{8\pi}{3}$; -2π.

Ответ: а) πk, $k\in Z$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in Z$; б) -3π; $-\frac{8\pi}{3}$; -2π.

Задание 14 (вариант 1)

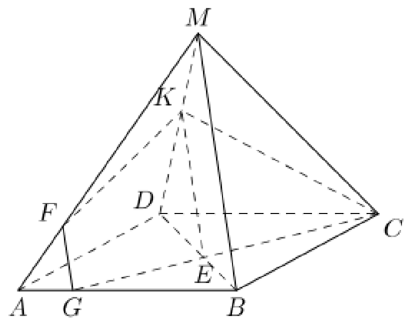
В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = \sqrt{33}$, все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AM – точка F так, что $MF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру MB.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость CEF пересекает грань AMD пирамиды.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Решение.



а) По теореме Пифагора $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{33+16} = 7$, поэтому $DE = 7 - BE = 4$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке G. Тогда треугольники BGE и DCE подобны, поэтому $\frac{BG}{DC} = \frac{BE}{DE} = \frac{3}{4}$, а значит, $BG = 3$ и $AG = 1$. Поскольку $MA = MB = AB = 4$ и $MF = BG = 3$, отрезок FG параллелен отрезку MB. Следовательно, ребро MB параллельно плоскости CEF.

б) Пусть плоскость CEF пересекает отрезок MD в точке K. Так как прямая FG параллельна MB, по признаку параллельности прямой и плоскости FG параллельна плоскости MBD. Плоскость MBD и секущая плоскость пересекаются по прямой KE, и по свойству параллельных прямой и плоскости прямая KE параллельна FG и, следовательно, параллельна MB.

Треугольники DKE и DMB подобны, поэтому $\frac{DK}{KM} = \frac{DE}{EB} = \frac{4}{3}$.

Тогда $MK = \frac{12}{7}$ и $DK = \frac{16}{7}$. Плоскость CEF пересекает грань AMD по отрезку FK.

По теореме косинусов для треугольника FMK получаем

$$FK^2 = FM^2 + MK^2 - 2 \cdot FM \cdot MK \cdot \cos\angle FMK.$$

Косинус угла FMK равен $\frac{AM^2 + MD^2 - AD^2}{2 \cdot AM \cdot MD} = -\frac{1}{32}$.

Следовательно, $FK = \frac{3\sqrt{267}}{14}$.

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{267}}{14}$.

Задание 15 (вариант 1)

Решите неравенство

$$2\log_2\frac{x+2}{x-3{,}7}+\log_2(x-3{,}7)^2\geq 2.$$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Первое слагаемое определено при $\frac{x+2}{x-3,7}>0$, то есть при $x<-2$ или $x>3,7$. На этих лучах, преобразуем неравенство:

$$\log_2\frac{(x+2)^2}{(x-3,7)^2}+\log_2(x-3,7)^2\geqslant 2\Leftrightarrow \log_2(x+2)^2\geqslant 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2\geqslant 4\Leftrightarrow x(x+4)\geqslant 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leqslant -4,\\ x\geqslant 0.\end{array}\right.$$

Решение неравенства: $x\leqslant -4$ или $x>3,7$.

Ответ: $(-\infty;\ -4]\cup(3,7;\ +\infty)$.

Задание 16 (вариант 1)

В июле планируется взять в банке некоторую сумму в кредит на три года.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года нужно внести платёж, равный 2,662 млн рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что долг был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

<u>Решение.</u>
Пусть сумма кредита составляет S млн рублей, а ежегодные выплаты составляют $x = 2{,}662$ млн рублей. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\quad 1{,}1S - x;\quad 1{,}1^2 S - (1{,}1x + x);\quad 1{,}1^3 S - \left(1{,}1^2 x + 1{,}1x + x\right) = 0,$$

и тогда $S = \dfrac{\left(1{,}1^3 - 1\right)x}{1{,}1^3 \cdot (1{,}1 - 1)} = \dfrac{331 \cdot 2{,}662}{1331 \cdot 0{,}1} = 6{,}62$ млн рублей.

Ответ: 6,62.

Задание 17 (вариант 1)

Дан треугольник ABC. Точка O – центр вписанной в него окружности. На стороне BC отмечена такая точка M , что $CM = AC$ и $BM = AO$.

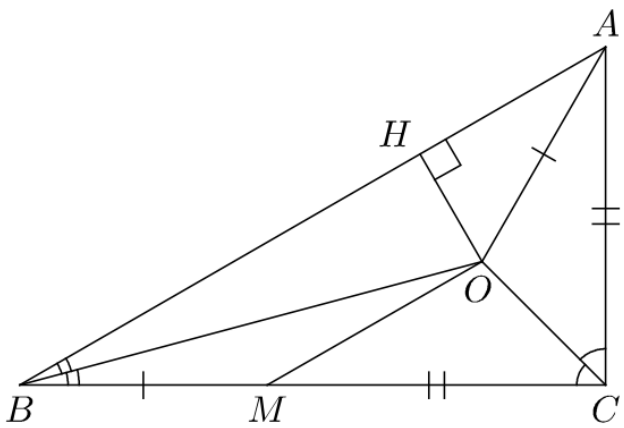
а) Докажите, что прямые AB и OM параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABMO$, если $\angle ACB = 90°$ и $AC = 4$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

Решение.

а) Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения его биссектрис. Следовательно, треугольники ACO и MCO равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $OM = AO = BM$. Таким образом треугольник BOM является равнобедренным и $\angle OBM = \angle BOM$.



С другой стороны, BO — биссектриса угла ABC, поэтому $\angle ABO = \angle OBM$. Таким образом, углы ABO и BOM равны, поэтому прямые AB и OM параллельны.

б) Четырёхугольник $ABMO$ — равнобедренная трапеция с основаниями AB и MO, поэтому $\angle BAO = \angle ABM$. Отсюда следует, что $\angle BAC = 2 \cdot \angle ABM$. Так как $\angle BCA = 90^\circ$, получаем $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$.

Из треугольника ABC находим, что $BC = 4\sqrt{3}$, $AB = 8$.

Поскольку $BC = BM + CM$, получаем $OM = BM = BC - CM = 4\sqrt{3} - 4$.

В трапеции $ABMO$ проведём высоту OH. В треугольнике AOH находим, что $OH = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{OM}{2} = 2\sqrt{3} - 2$.

Найдём площадь трапеции $ABMO$:

$$S_{ABMO} = \frac{AB + OM}{2} \cdot OH = \frac{8 + 4\sqrt{3} - 4}{2} \cdot \left(2\sqrt{3} - 2\right) = \left(2\sqrt{3} + 2\right)\left(2\sqrt{3} - 2\right) = 8.$$

Ответ: б) 8.

Задание 18 (вариант 1)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2-a^2|=|x+a|\cdot\sqrt{x^2-4ax+5a}$$

имеет ровно один корень.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	**4**
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=-1$.	**3**
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающиеся от искомого только исключением точки $a=-5$, возможно с включением точки $a=-1$, ИЛИ с помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающиеся от искомого только исключением точки $a=0$, возможно с включением точки $a=-1$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом выполнены все шаги решения.	**2**
Задача сведена к исследованию корней двух уравнений: $x+a=0$ при условии $x^2-4ax+5a\geq 0$, $2ax=5a-a^2$ при всех значениях a.	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	**0**
Максимальный балл	**4**

Решение. Перепишем уравнение

$$|x+a|\cdot|x-a|-|x+a|\cdot\sqrt{x^2-4ax+5a}=0;$$

$$|x+a|\cdot\left(|x-a|-\sqrt{x^2-4ax+5a}\right)=0.$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а другой при этом существует. Таким образом, возможны два случая

1) $\begin{cases} |x+a|=0, \\ x^2-4ax+5a\geq 0 \end{cases}$ или 2) $|x-a|=\sqrt{x^2-4ax+5a}$.

Рассмотрим оба случая.

1) $\begin{cases} x=-a, \\ a^2+4a^2+5a\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-a, \\ a(a+1)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-a, \\ a\leq -1 \text{ или } a\geq 0. \end{cases}$

Вывод: $x_1=-a$ – решение (*1-й корень*), если $a\leq -1$ или $a\geq 0$.

2) $|x-a|=\sqrt{x^2-4ax+5a}$.

Так обе части уравнения неотрицательны, то возводим в квадрат (посторонних корней не получим).

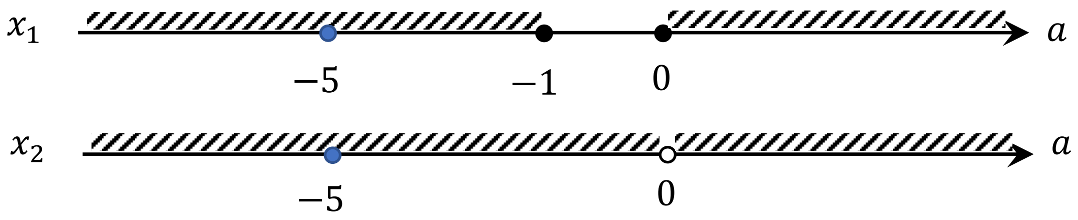
$$(x-a)^2 = x^2 - 4ax + 5a \;\Rightarrow\; x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 4ax + 5a \;\Rightarrow$$
$$2ax = 5a - a^2.$$

Вывод:

1. Если $a = 0$, то $x \in \mathbf{R}$ (решений – бесконечно много). Тогда $a \neq 0$.

2. Если $a \neq 0$, то $x_2 = \frac{5-a}{2}$ (*2-й корень*).

При этом корни могут совпадать. Заметим, что $x_1 = x_2$, если $-a = \frac{5-a}{2}$, то есть $a = -5$ (на схеме – синяя точка).



Ответ: $a \in \{-5\} \cup (-1; 0)$.

Задание 19 (вариант 1)

Есть 16 монеток по 2 рубля и 29 монеток по 5 рублей.
а) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 175?
б) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 176?
в) Какое наименьшее количество монеток по 1 рублю нужно добавить в набор, чтобы можно было получить любую целую сумму от 1 до 180 включительно.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Общая сумма денег равна $16 \cdot 2 + 29 \cdot 5 = 177$ рублей.

а) Да, нужно взять все монеты, кроме одной двухрублевой.

б) Нет, сумма невзятых монет тогда должна давать 1 рубль, что невозможно.

в) Ясно, что их надо не менее $180 - 177 = 3$ штуки. Докажем, что этого хватит. Если нужно представить сумму до 149 рублей, то возьмем сначала сколько сможем пятирублевых и останется набрать от 0 до 4 рублей, что возможно. Например 1, 2, 2 + 1, 2 + 2. Если же нужно представить сумму S от 150 до 180 рублей, то выберем монеты общей суммой

$$180 - S \leqslant 180 - 150 = 30$$

(это возможно), оставим их в кармане, а все остальные как раз дадут нужную сумму S.

Ответ: а) да, можно; б) нет, нельзя; в) 3.

Задание 13 (вариант 2)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	**2**
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за (одной) вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	**0**

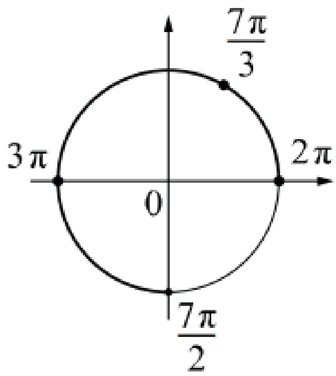
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2\sin x\cos x = \sin x; \quad \sin x\cdot(2\cos x - 1) = 0.$$

Значит, либо $\sin x = 0$, откуда следует, что $x = \pi k$, $k \in Z$, либо $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда следует, что $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа 2π; $\frac{7\pi}{3}$; 3π.

Ответ: а) πk, $k \in Z$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$; б) 2π; $\frac{7\pi}{3}$; 3π.

Задание 14 (вариант 2)

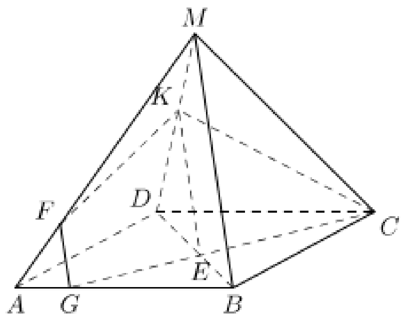
В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = \sqrt{33}$, все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на рёбрах AM и AB – точки F и G соответственно так, что $MF = BE = BG = 3$.

а) Докажите, что плоскость GEF проходит через точку C.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость GEF пересекает грань CMD пирамиды.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Решение.



а) По теореме Пифагора $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{33+16} = 7$, поэтому $DE = 7 - BE = 4$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке G_1. Тогда треугольники BG_1E и DCE подобны, поэтому $\frac{BG_1}{DC} = \frac{BE}{DE} = \frac{3}{4}$, а значит, $BG_1 = 3$ и $AG_1 = 1$. Отрезки BG_1 и BG равны, следовательно, точка G_1 совпадает с точкой G. Таким образом, точка G лежит на прямой EC, а значит, плоскость GEF проходит через точку C.

б) Поскольку $MA = MB = AB = 4$ и $MF = BG = 3$, отрезок FG параллелен отрезку MB. Пусть плоскость GEF пересекает отрезок MD в точке K. Так как прямая FG параллельна MB, по признаку параллельности прямой и плоскости FG параллельна плоскости MBD. Плоскость MBD и секущая плоскость пересекаются по прямой KE, и по свойству параллельных прямой и плоскости прямая KE параллельна FG и, следовательно, параллельна MB. Треугольники DKE и DMB подобны, поэтому $\frac{DK}{KM} = \frac{DE}{EB} = \frac{4}{3}$.

Тогда $MK = \frac{12}{7}$ и $DK = \frac{16}{7}$. Плоскость GEF пересекает грань CMD по отрезку CK. Угол CMK равен $60°$, так как $MC = MD = CD = 4$.
По теореме косинусов для треугольника CMK получаем

$$CK^2 = CM^2 + MK^2 - 2 \cdot CM \cdot MK \cdot \cos\angle CMK.$$

Следовательно, $CK = \frac{4\sqrt{37}}{7}$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{37}}{7}$.

Задание 15 (вариант 2)

Решите неравенство

$$2\log_2\frac{x-1}{x+1{,}3}+\log_2(x+1{,}3)^2\geq 2.$$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Первое слагаемое определено при $\frac{x-1}{x+1,3}>0$, второе — при $x\neq -1,3$, поэтому область определения неравенства $x\in(-\infty;\,-1,3)\cup(1;\,+\infty)$. При этих значениях переменной имеем:

$$\log_2\frac{(x-1)^2}{(x+1,3)^2}+\log_2(x+1,3)^2\geqslant 2\Leftrightarrow\log_2(x-1)^2\geqslant 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2\geqslant 4\Leftrightarrow x^2-2x-3\geqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leqslant -1,\\ x\geqslant 3.\end{array}\right.$$

Учитывая область определения, получаем решение неравенства: $x<-1,3$ или $x\geqslant 3$.

Ответ: $(-\infty;\ -1,3)\cup[3;\ +\infty)$.

Задание 16 (вариант 2)

В июле планируется взять в банке некоторую сумму в кредит на три года.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года нужно внести платёж, равный 2,592 млн рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что долг был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S млн рублей, а ежегодные выплаты составляют $x = 2{,}592$ млн рублей. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S; \quad 1{,}2S - x; \quad 1{,}2^2 S - (1{,}2x + x); \quad 1{,}2^3 S - \left(1{,}2^2 x + 1{,}2x + x\right) = 0,$$

и тогда $S = \dfrac{\left(1{,}2^3 - 1\right)x}{1{,}2^3 \cdot (1{,}2 - 1)} = \dfrac{728 \cdot 2{,}592}{1728 \cdot 0{,}2} = 5{,}46$ млн рублей.

Ответ: 5,46.

Задание 17 (вариант 2)

Дан треугольник ABC. Точка O – центр вписанной в него окружности. На стороне BC отмечена такая точка M, что $CM = AC$ и $BM = AO$.

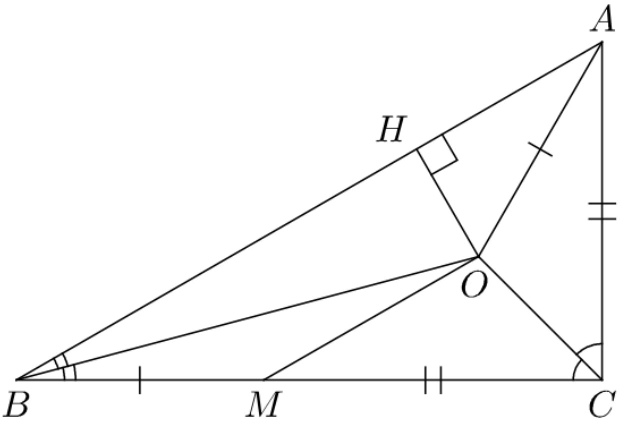
а) Докажите, что прямые AB и OM параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABMO$, если $\angle ACB = 90°$ и $AC = 6$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

Решение.

а) Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения его биссектрис. Следовательно, треугольники ACO и MCO равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $OM = AO = BM$. Таким образом треугольник BOM является равнобедренным и $\angle OBM = \angle BOM$.



С другой стороны, BO — биссектриса угла ABC, поэтому $\angle ABO = \angle OBM$. Таким образом, углы ABO и BOM равны, поэтому прямые AB и OM параллельны.

б) Четырёхугольник $ABMO$ — равнобедренная трапеция с основаниями AB и MO, поэтому $\angle BAO = \angle ABM$. Отсюда следует, что $\angle BAC = 2 \cdot \angle ABM$. Так как $\angle BCA = 90°$, получаем $\angle ABC = 30°$, $\angle BAC = 60°$.

Из треугольника ABC находим, что $BC = 6\sqrt{3}$, $AB = 12$.

Поскольку $BC = BM + CM$, получаем $OM = BM = BC - CM = 6\sqrt{3} - 6$.

В трапеции $ABMO$ проведём высоту OH. В треугольнике AOH находим, что $OH = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{OM}{2} = 3\sqrt{3} - 3$.

Найдём площадь трапеции $ABMO$:

$$S_{ABMO} = \frac{AB + OM}{2} \cdot OH = \frac{12 + 6\sqrt{3} - 6}{2} \cdot \left(3\sqrt{3} - 3\right) = \left(3\sqrt{3} + 3\right)\left(3\sqrt{3} - 3\right) = 18.$$

Ответ: б) 18.

Задание 18 (вариант 2)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2-a^2|=|x+a|\cdot\sqrt{x^2-4ax+5a}$$

имеет ровно один корень.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	**4**
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=-1$.	**3**
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающиеся от искомого только исключением точки $a=-5$, возможно с включением точки $a=-1$, ИЛИ с помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающиеся от искомого только исключением точки $a=0$, возможно с включением точки $a=-1$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом выполнены все шаги решения.	**2**
Задача сведена к исследованию корней двух уравнений: $x+a=0$ при условии $x^2-4ax+5a\geq 0$, $2ax=5a-a^2$ при всех значениях a.	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	**0**
Максимальный балл	**4**

Решение. Перепишем уравнение

$$|x+a|\cdot|x-a|-|x+a|\cdot\sqrt{x^2-4ax+5a}=0;$$

$$|x+a|\cdot\left(|x-a|-\sqrt{x^2-4ax+5a}\right)=0.$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а другой при этом существует. Таким образом, возможны два случая

$$1)\begin{cases}|x+a|=0,\\ x^2-4ax+5a\geq 0\end{cases}\quad \text{или} \quad 2)\ |x-a|=\sqrt{x^2-4ax+5a}.$$

Рассмотрим оба случая.

$$1)\begin{cases}x=-a,\\ a^2+4a^2+5a\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-a,\\ a(a+1)\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-a,\\ a\leq -1 \text{ или } a\geq 0.\end{cases}$$

Вывод: $x_1=-a$ – решение (*1-й корень*), если $a\leq -1$ или $a\geq 0$.

2) $|x-a|=\sqrt{x^2-4ax+5a}$.

Так обе части уравнения неотрицательны, то возводим в квадрат (посторонних корней не получим).

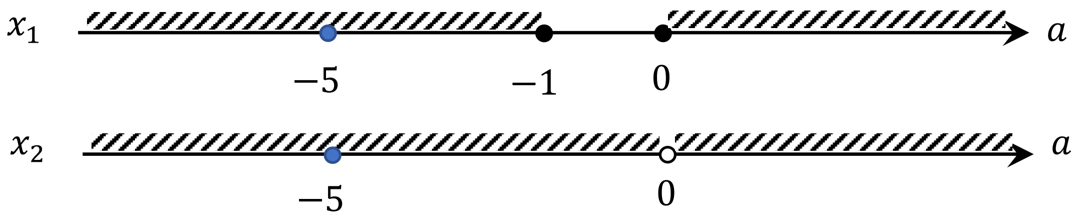
$$(x-a)^2 = x^2 - 4ax + 5a \;\Rightarrow\; x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 4ax + 5a \;\Rightarrow$$
$$2ax = 5a - a^2.$$

Вывод:

1. Если $a = 0$, то $x \in \mathbf{R}$ (решений – бесконечно много). Тогда $a \neq 0$.

2. Если $a \neq 0$, то $x_2 = \frac{5-a}{2}$ (*2-й корень*).

При этом корни могут совпадать. Заметим, что $x_1 = x_2$, если $-a = \frac{5-a}{2}$, то есть $a = -5$ (на схеме – синяя точка).



Ответ: $a \in \{-5\} \cup (-1; 0)$.

Задание 19 (вариант 2)

19. Есть 24 монет по 2 рубля и 30 монеток по 5 рублей.

а) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 196?

б) Можно ли взять несколько из них так, чтобы сумма взятых монет была равна 197?

в) Какое наименьшее количество монеток по 1 рублю нужно добавить в набор, чтобы можно было получить любую целую сумму от 1 до 200 включительно.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Общая сумма денег равна $24 \cdot 2 + 30 \cdot 5 = 198$ рублей.

а) Да, нужно взять все монеты, кроме одной двухрублевой.

б) Нет, сумма не взятых монет тогда должна давать 1 рубль, что невозможно.

в) Ясно, что их надо не менее $200 - 198 = 2$ штуки. Докажем, что этого хватит.

Если нужно представить сумму до 149 рублей, то возьмем сначала сколько сможем пятирублевых и останется набрать от 0 до 4 рублей, что возможно. Например 1, 2, 2 + 1, 2 + 2.

Если же нужно представить сумму S от 150 до 200 рублей, то выберем монеты общей суммой

$$200 - S \leqslant 200 - 150 = 50$$

(это возможно), оставим их в кармане, а все остальные как раз дадут нужную сумму S.

Ответ: а) да, можно; б) нет, нельзя в) 2.