

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 06.06.2022 16:44:45  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

«УТВЕРЖДАЮ»

И. о. ректора ТГУ

Т. Н. Скаковская

«27» 09

2022



# Программа

## вступительного испытания

для поступающих в аспирантуру  
по направлению 01.06.01 — «Математика и механика»  
направленность 01.01.06 —  
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

### **Общие требования**

Поступающий в аспирантуру для обучения по программе «Математическая логика, алгебра и теория чисел» направления 01.06.01 «Математика и механика» должен знать университетские курсы дискретной математики, алгебры, математической логики, теории алгоритмов, теории сложности, теории автоматов и формальных языков. Поступающий должен уметь читать научную литературу по данной специальности на русском и английском языках, уметь пользоваться справочными изданиями и электронными ресурсами для поиска нужной информации.

### **Темы вступительных испытаний**

1. Конечные автоматы и регулярные языки. Способы задания регулярных языков и их эквивалентность. Замкнутость класса регулярных языков относительно теоретико-множественных операций и гомоморфизмов. Теорема о разрастании, доказательство неавтоматности языков. [1]
2. Магазинные автоматы и контекстно свободные грамматики. Эквивалентность задаваемых ими языков. Теорема Огдена, доказательство того, что

- язык не является контекстно свободным. Незамкнутость класса контекстно свободных языков относительно дополнений и пересечений. [5]
3. Графы. Пути на графах. Эйлеровы, гамильтоновы графы. Ориентированные и неориентированные графы. Плоские графы, теорема Эйлера о плоских графах. Алгоритмы на графах: поиск пути, поиск кратчайшего пути. Раскраска графов, двудольные графы. Деревья. Обход деревьев в глубину и в ширину. [1]
  4. Линейные пространства над полями, линейные функции и операторы. Линейная независимость векторов. Конечномерные пространства. Базис и размерность. Скалярное произведение векторов. Ортогональность векторов, ортонормированный базис. Евклидовы и унитарные пространства. [3]
  5. Представление линейных преобразований матрицами. Ортогональные, самосопряжённые, унитарные преобразования. Собственные вектора линейных преобразований, собственные значения. Характеристический многочлен. Переход от одного базиса к другому. Приведение матриц к диагональному виду. [3]
  6. Определители. Системы линейных уравнений. Совместность системы линейных уравнений. Формула Крамера. Метод Гаусса. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Определённость квадратичных форм. Закон инерции. Критерий Сильвестра. [3]
  7. Алгебраические системы, подсистемы, термы, значение терма. Изоморфизмы. Свободные системы. Эквивалентности и конгруэнтности. Классы эквивалентности, фактор-системы. Гомоморфизмы. Основная теорема о гомоморфизмах. Декартовы произведения. Многообразия систем. Замкнутость многообразий относительно подсистем, гомоморфизмов и декартовых произведений. [4]
  8. Логика высказываний. Формулы логики высказываний. Семантика логики высказываний. Эквивалентность формул. Следование. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. Булевы функции, полные системы булевых функций, теорема Поста о полноте системы. Синтаксис

исчисления высказываний. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний. [5]

9. Логика предикатов. Формулы, кванторы, свободные и связанные вхождения переменных. Истинность формулы. Основные эквивалентности логики предикатов. Предварённые формулы. Примеры неэлементарных свойств систем. Исчисление предикатов. Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов. Арифметика Пеано, представимость в арифметике, функция Гёделя. Неразрешимость арифметики. [5]
10. Полугруппы, моноиды, группы. Свободные полугруппы и моноиды. Строение циклического моноида. Группы перестановок, линейных преобразований, симметрий фигуры. Вложение произвольной группы в группу перестановок. Свободные группы и определяющие соотношения. [2],[4]
11. Подгруппы, смежные классы, теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы, сопряжённые элементы, гомоморфизмы групп, ядра гомоморфизмов, фактор-группы. Специальные подгруппы: центр, коммутант, нормализатор множества/элемента (централизатор). Абелевы группы. Циклические группы. Строение циклических групп. Строение конечных абелевых групп. [2]
12. Кольца, поля. Делители нуля. Числовые кольца и поля. Кольца матриц и многочленов. Простые и обратимые элементы колец. Целостные, евклидовы кольца. Разложение на простые множители. Гомоморфизмы колец, идеалы, фактор-кольца. Простые, главные, максимальные идеалы. Конечные поля. Характеристика поля. Циклическость мультипликативной группы конечного поля. [2]
13. Машины Тьюринга. Базисные функции, операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Эквивалентность моделей алгоритма. Частично рекурсивные, примитивно рекурсивные, общерекурсивные функции. Универсальные частично рекурсивные функции. [5]
14. Разрешимые и неразрешимые проблемы. Алгоритмическая сводимость. Гёделевы нумерации частично рекурсивных функций. Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества. Неразрешимость и рекурсивная перечислимость проблем самоприменимости и остановки. Неразрешимость логики первого порядка. Теорема Поста о рекурсивных множествах. [5]

15. Сложность вычислений, абстрактные меры сложности (сигнализирующие функции), аксиомы Блюма. Обобщения машин Тьюринга и другие формализации понятия алгоритма, инвариантность временной сложности с точностью до полинома. Классы P, NP и PSPACE. Сводимость за полиномиальное время. Примеры NP-полных проблем. NP-полнота проблемы выполнимости для логики высказываний. [5]

### *Литература*

- [1] Дехтярь М. И. Лекции по дискретной математике : учеб. пособие / М. И. Дехтярь. — М.: Интернет-Университет Информ. Технологий: БИНОМ, 2007. — 259 с.: ил.
- [2] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — СПб.: Лань, 2004. — 624 с.
- [3] Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : Учеб. пособие для студентов мех.-мат. спец. вузов / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — 319 с.: ил.
- [4] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с., [1] л. портр.: ил.
- [5] Столбоушкин А. П. Математические основы информатики [Электронный ресурс] / Столбоушкин А. П., Тайцлин М. А. — Тверь: ТвГУ, 2013.

Руководитель

направления подготовки 01.06.01 —

«Математика и механика»

доктор физ.-мат. наук

С. М. Дудаков