Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ООП

С.М.Дудаков
_______________

« » ____________ 2023 г.

Тверской государственный университет
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

# Математическая логика и теория алгоритмов

Направление подготовки
01.03.02 — Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки
Искусственый интеллект и анализ данных

для студентов 2 курса
Форма обучения — очная

Составитель(и):
- д.ф.-м.н. доц. С.М.Дудаков

Тверь — 2023

# I. Аннотация

## 1. Цель и задачи дисциплины:

Дать обучающимся фундаментальные знания и базовые представления о различных определениях алгоритмической вычислимости, их эквивалентности, о существовании неразрешимых проблем, о различных способах сравнения алгоритмических проблем, о формальных исчислениях, о понятиях истинности, логической выводимости, их свойствах и взаимосвязи, о различных методах поиска логических выводов, о неразрешимости логики предикатов и формальной арифметики, неполноте последней, о существовании различных классов вычислительной сложности, о сравнении различных классов сложности, о существовании труднорешаемых проблем.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина входит в раздел «Математический» обязательной части блока 1.

**Предварительные знания и навыки.** Предполагается, что студент умеет реализовывать на языках программирования основные алгоритмы обработки и хранения информации (сортировка, поиск, теоретико-числовые задачи), а также знаком с одной из формализаций понятия алгоритма — машинами Тьюринга. Также студент должен быть знаком с простейшими понятиями логики высказываний и логики предикатов (формулы, истинность, нормальные формы). Указанные знания должны быть получены при изучении курсов дискретной математики, теоретических основ информатики, методов программирования, алгебры.

**Дальнейшее использование.** Полученные знания используются в последующем при изучении предметов: «Теория автоматов и формальных языков», «Базы данных», «Алгоритмы и анализ сложности».

## 3. Объем дисциплины: 10 зач. ед., 360 акад. ч., в том числе:

**контактная аудиторная работа** лекций 93 ч., в том числе практическая подготовка 6 ч., практических занятий 93 ч.,

**контактная внеаудиторная работа** контроль самостоятельной работы 0 ч., в том числе курсовая (расчетно-графическая) работа 0 ч.;

**самостоятельная работа** 174 ч., в том числе контроль 74 ч.

## 4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы:

| Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции) | Планируемые результаты обучения по дисциплине |
|---|---|
| ПК-1, Способен классифицировать и идентифицировать задачи искусственного интеллекта, выбирать адекватные методы и инструментальные средства решения задач искусственного интеллекта | ПК-1.2, Выбирает методы и инструментальные средства искусственного интеллекта для решения задач в зависимости от особенностей проблемной и предметной областей |
| ПК-2, Способен разрабатывать и тестировать программные компоненты решения задач в системах искусственного интеллекта | ПК-2.1, Настраивает программное обеспечение и участвует в разработке программных компонентов систем искусственного интеллекта |
| ПК-3, Способен осуществлять концептуальное моделирование проблемной области и проводить формализацию представления знаний в системах искусственного интеллекта | ПК-3.1, Разрабатывает концептуальную модель проблемной области системы искусственного интеллекта |

## 5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения:

экзамен в 3–4 семестрах

## 6. Язык преподавания:

русский

## II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

### Для студентов очной формы обучения

| Учебная программа — наименование разделов и тем | Всего (час.) | Контактная работа (час.) | | | | | Сам. раб., в т.ч. контроль (час.) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Лекции | | Практ. занятия / Лаб. работы | | Контроль сам. раб., в т.ч. курсовая работа | |
| | | Всего | В т.ч. практ. подг. | Всего | В т.ч. практ. подг. | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Счетчиковые машины | 11 | 3 | | 4/0 | | 0 | 4 |
| Машины Тьюринга | 8 | 4 | | 0/0 | | 0 | 4 |
| Частично рекурсивные функции | 40 | 12 | | 16/0 | | 0 | 12 |
| Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества | 39 | 10 | | 11/0 | | 0 | 18 |
| Исчисления | 22 | 8 | | 4/0 | | 0 | 10 |
| Логика высказываний | 39 | 8 | | 10/0 | | 0 | 21 |
| Семантика логики предикатов | 31 | 3 | | 12/0 | | 0 | 16 |
| Исчисление предикатов | 40 | 10 | | 12/0 | | 0 | 18 |
| Разрешимость теорий | 31 | 6 | | 0/0 | | 0 | 25 |
| Формальная арифметика | 38 | 9 | | 12/0 | | 0 | 17 |
| Сложность вычислений | 9 | 6 | 6 | 0/0 | 0/0 | 0 | 3 |
| Полиномиальные вычисления | 36 | 6 | | 10/0 | | 0 | 20 |
| Классы NP и PSPACE | 16 | 8 | | 2/0 | | 0 | 6 |
| Итого | 360 | 93 | 6 | 93/0 | 0/0 | 0 | 174 |

### Учебная программа дисциплины

1. Счетчиковые машины
   - Определение, конфигурации. Примеры. Вычислимость функций на счетчиковых машинах. Блок-схемы.
   - Эквивалентность счетчиковых машин и программ с метками. Канторова нумерация пар, кодирование конечных последовательностей.
2. Машины Тьюринга
   - Определение, конфигурации. Примеры. Взаимное кодирование чисел и слов.

- Моделирование машины Тьюринга на счетчиковой машине. Односторонние машины Тьюринга. Моделирование счетчиковой машины на машине Тьюринга.
- Теорема о количестве состояний.

3. Частично рекурсивные функции
    - Примитивно рекурсивные функции: определение, примеры. Примитивная рекурсивность арифметических функций. Ограниченная минимизация.
    - Функции Аккермана, невозможность примитивно рекурсивного представления.
    - Минимизация. Частично рекурсивные и общерекурсивные функции. Вычислимость ч.р.ф. на счетчиковой машине.
    - Построение универсальной ч.р.ф.: кодирование счетчиковых машин и их конфигураций.
    - Эффективное построение композиции счетчиковых машин. snm-теорема для счетчиковых машин.
    - Нумерации ч.р.ф. Геделевы нумерации. snm-теорема для произвольных нумераций. Теорема о неподвижной точке.
4. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества
    - Рекурсивные множества. Свойства. Неразрешимость множеств самоприменимости и остановки
    - Определение и основные свойства. Рекурсивная перечислимость проблем самоприменимости и остановки.
    - Перечислимость без повторений и по возрастанию. Способы задания рекурсивно перечислимых множеств.
    - m-сводимость, теорема Райса-Успенского. Множества общеприменимых и минимальных программ.
    - Продуктивность и m-полнота.
5. Исчисления
    - Общее понятие исчисления. Аксиомы и правила вывода. Линейный вывод и вывод в виде дерева. Допустимые аксиомы. Рекурсивная перечислимость выводимых слов.
    - Исчисление Туэ. Построение исчисления Туэ по счетчиковой машине. Ассоциативные исчисления. Неразрешимость проблемы выводимости в ассоциативном исчислении.
    - $\lambda$-исчисление. Представление ч.р.ф. в $\lambda$-исчислении.
6. Логика высказываний

- Синтаксис и семантика формул ЛВ. Нормальные формы: конъюнктивная и дизъюнктивная. Интерполяционная теорема для ЛВ.
- Исчисление высказываний, аксиомы и правила вывода. Допустимые аксиомы исчисления высказываний. Примеры выводимых секвенций. Семантика секвенций. Теорема о непротиворечивости исчисления высказываний.
- Теорема о полноте исчисления высказываний. Вывод из гипотез. Теорема о дедукции.

7. Семантика логики предикатов
   - Сигнатуры, термы, формулы логики высказываний. Алгебраические системы. Истинность. Замена переменных в термах и формулах. Свойства замены.
   - Запись математических утверждений с помощью формул первого порядка
8. Исчисление предикатов
   - Аксиомы и правила вывода ИП. Непротиворечивость ИП. Допустимые аксиомы и правила вывода ИП.
   - Непротиворечивые, совместные и полные множества, их свойства. Теорема Линденбаума. Множества со свидетелями. Лемма Генкина.
   - Полнота ИП, теорема компактности и смежные вопросы: неаксиоматизируемость конечности, теоремы Левенгейма-Скулема.
9. Разрешимость теорий
   - m-полнота множества тождественно истинных формул. Зависимость разрешимости от сигнатуры.
   - Теорема Трахтенброта.
   - Теории, формализации теорий. Рекурсивная аксиоматизируемость, полнота и разрешимость.
   - Разрешимость теории плотного линейного порядка без первого и последнего элементов.
   - Неразрешимость теорий полугрупп и моноидов.
10. Формальная арифметика
    - Аксиомы арифметики Пеано.
    - Выводимость арифметических утверждений.
    - Порядок и его свойства.
    - Кодирование последовательностей. Представимость о.р.ф.
    - Неполнота и неразрешимость арифметики Пеано. Неаксиоматизируесоть элементарной арифметики.
    - Предикаты выводимости. Невыводимость непротиворечивости.

- Другие примеры невыводимых утверждений.

11. Сложность вычислений
    - Меры сложности, аксиомы Блюма, простейшие свойства.
    - Диагональ Цейтина. Диагональ Рабина.
    - Диагональ Блюма
12. Полиномиальные вычисления
    - Время вычисления. Машины Тьюринга и модифицированные счетчиковые машины.
    - Модели параллельных вычислительных устройств. Многоленточные и многоголовочные машины. Взаимное моделирование многоленточных и многоголовочных машин, а также на простой машине.
    - Клеточные автоматы. Моделирование клеточного автомата на машине Тьюринга. Моделирование многоленточной машины на клеточном автомате.
    - Тезис об инвариантности класса PTIME. Ускорение и сжатие в константу раз
13. Классы NP и PSPACE
    - Недетерминированные вычисления.
    - Класс NP. Теорема Кука-Левина, другие примеры NP-полных задач.
    - Вычисления с полиномиальной памятью, класс PSPACE. PSPACE-полнота множества QBF

# III. Образовательные технологии

| Учебная программа — наименование разделов и тем | Вид занятия | Образовательные технологии |
|---|---|---|
| Счетчиковые машины | лекции, практические занятия | изложение теоретического материала, решение задач |
| Машины Тьюринга | лекции | изложение теоретического материала |
| Частично рекурсивные функции | лекции, практические занятия | изложение теоретического материала, решение задач |
| Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества | лекции, практические занятия | изложение теоретического материала, решение задач |
| Исчисления | лекции, практические занятия | изложение теоретического материала, решение задач |
| Логика высказываний | лекции, практические занятия | изложение теоретического материала, решение задач |
| Семантика логики предикатов | лекции, практические занятия | изложение теоретического материала, решение задач |

| Учебная программа — наименование разделов и тем | Вид занятия | Образовательные технологии |
|---|---|---|
| Исчисление предикатов | лекции, практические занятия | изложение теоретического материала, решение задач |
| Разрешимость теорий | лекции | изложение теоретического материала |
| Формальная арифметика | лекции, практические занятия | изложение теоретического материала, решение задач |
| Сложность вычислений | лекции | изложение теоретического материала |
| Полиномиальные вычисления | лекции, практические занятия | изложение теоретического материала, решение задач |
| Классы NP и PSPACE | лекции, практические занятия | изложение теоретического материала, решение задач |

# IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

## Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора ПК-1.2

| Требования к обучающемуся | Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков | Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания |
|---|---|---|
| Знать некоторые математические формализации понятия алгоритма | Примеры вопросов к экзамену:<br>• Счетчиковые машины. Конфигурации. Программы для счетчиковых машин. Вычислимые на счетчиковых машинах функции.<br>• Построение счетчиковой машины по программе с метками.<br>• Построение программы с метками по счетчиковой машине.<br>• Машины Тьюринга. Конфигурация машины Тьюринга. Нормальные входные слова. Стандартная заключительная конфигурация. Односторонние машины Тьюринга.<br>• Построение машины Тьюринга по счетчиковой машине.<br>• Построение счетчиковой машины по машине Тьюринга.<br>• Теорема о количестве состояний машины Тьюринга.<br>• Базисные функции. Операции суперпозиции и примитивной рекурсии. Примитивно рекурсивные функции. Ограниченная минимизация. Примитивная рекурсивность арифметических функций и отношений.<br>• Функция Аккермана как пример не примитивно рекурсивной функции.<br>• Минимизация. Частично рекурсивные функции. Общерекурсивные функции. Вычислимость ч.р.ф. на счетчиковых машинах.<br>• Построение универсальной ч.р.ф. Представление ч.р.ф. с одной минимизацией. | оценка 3 — знает некоторые математические модели алгоритма, оценка 4 — знает несколько различных математических моделей алгоритма, оценка 5 — знает различные математические модели алгоритма, применимые для различных целей |

| Требования к обучающемуся | Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков | Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания |
|---|---|---|
| | • Построение номера композиции счетчиковых машин. Эффективная подстановка для счетчиковых машин. | |
| Знает основы теории разрешимых и неразрешимых проблем | Примеры вопросов к экзамену:<br>• Геделевы нумерации. Универсальная ч.р.ф. как геделева нумерация. $s-n-m$-теорема. Теоремы о неподвижной точке.<br>• Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества. Рекурсивность конечных множеств. Замкнутость класса рекурсивных множеств относительно теоретико-множественных операций. Рекурсивная перечислимость рекурсивных множеств.<br>• Теорема о задании рекурсивно перечислимых множеств. Замкнутость класса рекурсивно-перечислимых множеств относительно операций объединения и пересечения.<br>• Теорема Поста о рекурсивных множествах.<br>• Перечисления по возрастанию и без повторений.<br>• График функции, теорема о графиках ч.р.ф.<br>• Нерекурсивность и рекурсивная перечислимость множеств SELF и HALT.<br>• $m$-сводимость. Теоремы о сводимости для рекурсивных и рекурсивно перечислимых множеств. Теорема Райса-Успенского.<br>• Невозможность рекурсивного перечисления TOTAL. Отсутствие рекурсивно перечислимых подмножеств у MIN.<br>• m-полные множества. Продуктивные множества. Сводимость продуктивных множеств. Продуктивность дополнений полных множеств.<br>• Исчисления. Вывод в исчислении: линейный и в виде дерева, их эквивалентность.<br>• Исчисления Туэ. Слова Поста. Неразрешимость проблемы выводимости для исчислений Туэ.<br>• Ассоциативные исчисления. Неразрешимость проблемы выводимости для ассоциативных исчислений. | оценка 3 — знает основные определения и простейшие алгоритмические свойства множеств, оценка 4 — кроме того, знает взаимосвязи между различными свойствами, оценка 5 — кроме того, знает доказательства приведённых выше утверждений |
| Знает синтаксис и семантику логики высказываний, исчисление высказываний | Примеры вопросов к экзамену:<br>• Формулы логики высказываний. Построение. Семантика формул логики высказываний. Эквивалентности логики высказываний.<br>• Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. Интерполяционная теорема для логики высказываний.<br>• Секвенции. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний.<br>• Непротиворечивость исчисления высказываний.<br>• Полнота исчисления высказываний.<br>• Вывод из гипотез, теорема о дедукции. | оценка 3 — знает синтаксис и семантику логики высказываний, эквивалентности ЛВ, некоторые правила формального вывода, оценка 4 — кроме того, знает одну из формализаций логического вывода и ее свойства, оценка 5 — кроме того умеет доказывать вышеперечисленные утверждения |
| Знает синтаксис и семантику логики предикатов, исчисление предикатов | Примеры вопросов к экзамену:<br>• Сигнатуры, термы, атомные формулы, формулы, кванторы, свободные и связанные переменные, замена переменных. | оценка 3 — знает синтаксис и семантику логики предикатов, некоторые правила |

| Требования к обучающемуся | Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков | Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания |
|---|---|---|
| | • Алгебраические системы. Состояния. Значение термов и формул. Истинность и ложность формул. Общезначимость и выполнимость формул.<br>• Следование и основные эквивалентности логики предикатов. Предваренная форма.<br>• Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Допустимые аксиомы и правила вывода исчисления предикатов.<br>• Непротиворечивость исчисления предикатов. Вывод логических эквивалентностей.<br>• Формально непротиворечивые и выполнимые (совместные) множества. Теорема Линденбаума и лемма Генкина для счетных множеств.<br>• Полнота исчисления предикатов. Теорема Левенгейма-Скулема о счетной модели. Теорема компактности для счетных множеств. Неаксиоматизируемость конечности. | формального вывода, оценка 4 — кроме того одну из формализаций логического вывода и ее свойства, оценка 5 — кроме того умеет доказывать вышеперечисленные утверждения |
| Знает взаимосвязи между формальными теориями и теорией алгоритмов | Примеры вопросов к экзамену:<br>• Моделирование работы счетчиковой машины при помощи формул логики предикатов. Рекурсивная перечислимость и неразрешимость множества общезначимых формул. Рекурсивная перечислимость и неразрешимость множества конечно выполнимых формул.<br>• Теории, формализация теорий. Рекурсивная аксиоматизируемость, перечислимость, полнота и разрешимость теорий.<br>• Разрешимость теории плотного линейного порядка без первого и последнего элементов.<br>• Арифметика Пеано. Представимость общерекурсивных функций в арифметике Пеано. Диагонализация. Неразрешимость и неполнота формализованной арифметики.<br>• Предикаты выводимости. Свойства предикатов выводимости. Невыводимость утверждений о собственной непротиворечивости. | оценка 3 — знает понятие теории, аксиоматику некоторых теорий, в том числе — формальной арифметики, оценка 4 — знает алгоритмически разрешимые и неразрешимые теории, взаимосвязи между формальной арифметикой и теорией алгоритмов, оценка 5 — кроме того умеет доказывать вышеперечисленные утверждения |
| Знает основы теории сложности, основные классы сложности | Примеры вопросов к экзамену:<br>• Меры сложности. Аксиомы Блюма. Общие теоремы о сложности: инвариантность мер, диагональ Цейтина, диагональ Рабина, диагональ Блюма.<br>• Временная и пространственная сложность. Примеры нахождения временной и пространственной сложности. Ускорение и сжатие в константу раз.<br>• Моделирование вычислительных устройств за полиномиальное время: многоленточные машины, многоголовочные машины, клеточные автоматы, модифицированные счетчиковые машины.<br>• Недетерминированные вычисления, сводимость за полиномиальное время. Классы P и NP. NP-полнота и NP-трудность, NP-полнота множества SAT. Класс PSPACE, PSPACE-полнота проблемы QBF. | оценка 3 — знает формальное понятие меры сложности, основных классов сложности, оценка 4 — знает свойства мер сложности и классов сложности, взаимосвязи между ними, оценка 5 — кроме того умеет доказывать вышеперечисленные утверждения |
| Владеть базовыми навыками самостоятельного поиска и изучения информа- | Возможные темы для самостоятельного изучения<br>• Общерекурсивность функции Аккермана<br>• Сводимость множеств EQU и TOTAL | оценка 3 — способен самостоятельно найти требуемую информацию, оценка 4 — |

| Требования к обучающемуся | Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков | Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания |
|---|---|---|
| ции | • Рекурсивный изоморфизм геделевых нумераций<br>• Классы арифметической иерархии<br>• Генценовское исчисление<br>• Исчисление Лукасевича<br>• Исчисление резолюций<br>• Независимость аксиом и правил вывода исчисления высказываний<br>• Разрешимость монадической логики<br>• Логика второго порядка<br>• Разрешимость аддитивной арифметики натуральных чисел (арифметики Пресбургера)<br>• Арифметическое вынуждение и арифметическая неопределимость генерических множеств<br>• Теорема Рамсея<br>• Элиминация кванторов в теории алгебраически замкнутых полей<br>• Геометрия Тарского<br>• NP-полнота проблемы трёх цветов<br>• PSPACE-полнота решения игры «простой путь»<br>• Вычисления со стеком<br>• Метод следов | кроме того, способен изучить найденные сведения, оценка 5 — кроме того, способен применить полученные знания для решения конкретных задач |

## Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора ПК-2.1

| Требования к обучающемуся | Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков | Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания |
|---|---|---|
| Умеет реализовывать алгоритмы с учётом требований к сложности | Примеры задач для контрольных работ:<br>• Написать клеточный автомат, который за линейное от длины входа время решает следующую задачу: по слову четной длины в алфавите $\{a, b\}$ определить, верно ли что первая его половина не содержит букв $b$.<br>• Описать недетерминированный алгоритм, который за полиномиальное время решает следующую задачу: по целым числам $a_1, \ldots, a_n, b$ определить, можно ли из $a_1, \ldots, a_n$ (кждое число используется не более одного раза) составить арифметическое выражение с операциями $+, -, \times$ так, чтобы его результат был равен $b$. | оценка 3 — может построить простейший недетерминированный алгоритм, оценка 4 — может построить алгоритм и доказать, что он работает полиномиальное время, оценка 5 — может доказать, что задача принадлежит классу P, NP или PSPACE |

## Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора ПК-3.1

| Требования к обучающемуся | Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков | Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания |
|---|---|---|
| Умеет описывать алгоритмы с использованием различных формализаций | Примеры задач для контрольных работ:<br>• Написать счетчиковую машину, вычисляющую количество единиц в двоичной записи числа $x$ (можно строить вспомогательные машины, нельзя использовать машины, построенные на лекциях).<br>• Написать машину Тьюринга, которая заменяет во входном слове каждую последовательность букв $a$ на $b$, если после нее стоит буква $b$, или на $c$ в противном случае (слова в алфавите $\{a, b, c\}$). Можно расширять используемый алфавит.<br>• Последовательно построить частично рекурсивную функцию для первой задачи | оценка 3 — умеет формализовать простейшие алгоритмы с использованием некоторых формализаций, оценка 4 — умеет формализовать основные алгоритмы с использованием некоторых формализаций, оценка 5 — умеет формализовать основные алгоритмы с использованием различных формализаций |
| Может устанавливать разрешимость, неразрешимость, рекурсивную перечислимость проблем в простейших случаях | Примеры задач для контрольных работ:<br>• Пусть $\Phi$ — произвольная геделева нумерация одноместных частично рекурсивных функций, а множество $A$ задано следующим образом: $A = \{\langle x, y\rangle : \Phi_x(z)$ определено для некоторого $z < y\}$ Доказать, что множество $A$ рекурсивно перечислимо, нерекурсивно и m-трудно.<br>• Пусть $\Phi(x, y)$ — геделева нумерация одноместных ч.р.ф. Доказать, что следующее множество $A$ является нерекурсивным, продуктивным, а его дополнение рекурсивно перечислимо: $A = \{x \in \omega :$ $\Phi_x$ является линейной на области определения$\}$. | оценка 3 — умеет устанавливать алгоритмическую неразрешимость в простейших случаях, оценка 4 — умеет устанавливать нерекурсивность/перечислимость множеств в основных случаях, оценка 5 — умеет устанавливать нерекурсивность/перечислимость множеств с использованием неподвижной точки |
| Умеет определять семантические свойства формул, строить нормальные формы и формальные выводы в логике высказываний | Примеры задач для контрольных работ:<br>• Для следующей формулы построить таблицу истинности; определить, является ли она тождественно истинной, тождественно ложной, выполнимой; построить эквивалентные КНФ и ДНФ: $\boxed{(\neg(a \wedge b)) \to (c \wedge a)}$.<br>• Построить вывод следующей секвенции. Разрешается применять допустимые аксиомы и правила вывода, разобранные на лекциях. Многократные применения перестановок и утончений допускается пропускать. $\boxed{a \vee b, \neg b \vee c \vdash (a \to c) \to c}$. Допускается использовать правила конкретизации, замены равных, аксиомы для симметричности и транзитивности равенства. Допускается пропускать применения правил перестановки, а многократные утончения объединять в одно. | оценка 3 — умеет применять некоторые правила исчисления высказываний, оценка 4 — умеет строить некоторые формальные выводы среднего уровня сложности, оценка 5 — умеет строить различные формальные выводы |
| Умеет описывать свойства предметных областей с помощью формул логики предикатов | Примеры задач для контрольных работ:<br>• Сигнатура содержит три двухместных предикатных символа: $P, S, Sp$, и один одноместный: $M$. Носителем алгебраической системы $\mathfrak{A}$ является некоторое непустое множество людей, а предикатные символы интерпретируются так: $P(x, y)$ истинно, | оценка 3 — умеет определять истинность формул, применять некоторые правила исчисления высказываний, оценка |

| Требования к обучающемуся | Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков | Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания |
|---|---|---|
| | если $x$ — родитель $y$; $M(x)$ истинно, если $x$ — мужчина; $S(x,y)$ истинно, если $x$ и $y$ состоят в браке; $Sp(x,y)$ истинно, если $x$ и $y$ состояли в браке когда-либо (может быть, до сих пор состоят). Написать формулу с одной свободной переменной $x$, которая была бы истинна в алгебраической системе $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда у $x$ есть двоюродный брат, который женат и не имеет детей, и двоюродную сестру, которая не замужем. Прокомментировать значение каждой подформулы.<br>• Построить граф из четырех вершин, на котором будет истинна формула, пояснить. $(\exists x)(\forall y)(\neg x = y \to (E(x,y) \wedge E(y,y)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\neg x = y \to (\exists z)(E(x,z) \wedge E(y,z)))$<br>• Определить, будет ли истинной следующая формула в системе $(\mathbb{R}^+; +, \times, 1/x)$, пояснить: $(\forall u)(\exists v)(u = (1/u)+v\times v \vee (u+v)\times u = u \vee (\forall v) u \times v = v)$ | 4 — умеет описывать свойства предметных областей формулами логики предикатов, строить некоторые формальные выводы среднего уровня сложности, оценка 5 — кроме того умеет строить различные формальные выводы |
| Умеет строить формальные выводы в теориях | Примеры задач для контрольных работ:<br>• Пусть теория $T$ задана аксиомой $R(x,y), R(y,z) \vdash x = y$. Вывести в теории $T$ секвенцию $(\forall x)R(x, f(x)) \vdash (\forall x)x = f(x)$<br>• Вывести в исчислении предикатов секвенцию $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge P(y,x) \to x = y), (\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \wedge P(z,y)) \vdash (\forall x)P(x,x)$<br>• Вывести в арифметике Пеано секвенцию $\vdash \neg s(x) = x$ | оценка 3 — умеет применять некоторые приёмы формального арифметического вывода, оценка 4 — умеет строить арифметические выводы средней сложности, оценка 5 — кроме того умеет использовать различные приёмы формального вывода |

# V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

## 1. Рекомендованная литература

### а) Основная литература


[1] Макоха, А. Н. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Н. Макоха, А. В. Шапошников, В. В. Бережной. — Электрон. текстовые данные. — Ставрополь : Северо-Кавказский федеральный университет, 2017. — 418 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69397.html

[2] Игошин, В. И. Теория алгоритмов : учебное пособие / В. И. Игошин. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 318 с. — (Высшее образование). - ISBN 978-5-16-005205-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/968714 (дата обращения: 17.10.2023). – Режим доступа: по подписке.

[3] Игошин В.И. Математическая логика : учеб. пособие. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 398 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/987006 — Загл. с экрана

**б) Дополнительная литература**

[4] Верещагин, Н.К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов : учебное пособие / Н.К. Верещагин, А. Шень. — 3-е изд., доп. — Москва : МЦНМО, [б. г.]. — Часть 2 : Языки и исчисления — 2008. — 288 с. — ISBN 978-5-94057-322-7. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/9307 — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).

[5] Верещагин, Н.К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов : учебное пособие / Н.К. Верещагин, А. Шень. — 3-е изд., стер. — Москва : МЦНМО, [б. г.]. — Часть 3 : Вычислимые функции — 2008. — 192 с. — ISBN 978-5-94057-323-4. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/9308 — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).

[6] Марченков, С.С. Рекурсивные функции [Электронный ресурс] : . — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2007. — 62 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2260 — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).

## 2. Программное обеспечение

| Наименование помещений | Программное обеспечение |
|---|---|
| Ауд. 201а (компьютерная лаборатория ПМиК) (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35) | Перечень программного обеспечения (со свободными лицензиями): Linux Kubuntu, KDE, TeXLive, TeXStudio, LibreOffice, GIMP, Gwenview, ImageMagick, Okular, Skanlite, Google Chrome, KDE Connect, Konversation, KRDC, KTorrent, Thunderbird, Elisa, VLC media player, PulseAudio, KAppTemplate, KDevelop, pgAdmin4, PostgreSQL, Qt, QtCreator, R, RStudio, Visual Studio Code, Perl, Python, Ruby, clang, clang++, gcc, g++, nasm, flex, bison, Maxima, Octave, Dolphin, HTop, Konsole, KSystemLog, Xterm, Ark, Kate, KCalc, Krusader, Spectacle, Vim. |

## 3. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

[1] ЭБС «ZNANIUM.COM» http://www.znanium.com

[2] ЭБС «Университетская библиотека онлайн» https://biblioclub.ru

[3] ЭБС IPRbooks http://www.iprbookshop.ru

[4] ЭБС «Лань» http://e.lanbook.com

[5] ЭБС «Юрайт» https://urait.ru

[6] ЭБС ТвГУ http://megapro.tversu.ru/megapro/Web

[7] Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (подписка на журналы) https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp

[8] Репозитарий ТвГУ http://eprints.tversu.ru

### 4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

[1] A Problem Course in Mathematical Logic, http://euclid.trentu.ca/math/sb/pcml/

[2] Logic Matters, http://www.logicmatters.net/tyl/

[3] Mathematical Logic and Algorithms Theory, https://iversity.org/en/courses/mathematical-logics-and-algorithms-theory

[4] Московский центр непрерывного математического образования, http://www.mccme.ru/

## VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 баллов. Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

Обучающемуся, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55–57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен.

### Требования к рейтинг контролю (3 семестр)

**Контрольная работа 1.** Тема: формальные модели алгоритмов, счетчиковые машины, частично рекурсивные функции. Пример задания:

1. Написать счетчиковую машину, вычисляющую произведение ненулевых цифр числа $x$ в шестеричной записи (можно строить вспомогательные машины и использовать машины, построенные на лекциях).

2. Написать частично рекурсивную функцию для определения, является ли число $x$ квадратичным вычетом по модулю $y$: 1, если существует $z$ для которого $z^2 \equiv x \pmod y$, 0 в противном случае. Считать, что $y \geqslant 1$.

За решение каждой задачи выставляется максимум 5 баллов.

**Контрольная работа 2.** Темы: нумерации, рекурсивная перечислимость, полнота, продуктивность. Пример задания:

- Пусть $\Phi$ — произвольная геделева нумерация одноместных частично рекурсивных функций, а множество $A$ задано следующим образом:

$$A = \{\langle x, y\rangle : \Phi_x(z) \text{ определено для некоторого } z \in [x, y)\}.$$

Доказать, что множество $A$ рекурсивно перечислимо, нерекурсивно и m-трудно.

За решение каждой задачи выставляется максимум 5 баллов.

**Контрольная работа 3.** Темы: логика высказываний, формальные исчисления, исчисление высказываний. Пример задания:

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности; определить, является ли она тождественно истинной, тождественно ложной, выполнимой; построить эквивалентные КНФ и ДНФ: $\neg a \to (b \vee \neg(a \wedge c))$.
2. Построить вывод следующей секвенции. Разрешается применять допустимые аксиомы и правила вывода, разобранные на лекциях. Многократные применения перестановок и утончений допускается пропускать. $c \to \neg b \vdash (c \wedge b) \to (a \wedge c)$.
3. Построить исчисление с конечным числом аксиом и правил вывода, в котором слова вида $a^n b^m$ выводились бы тогда и только тогда, когда у $n$ и $m$ есть общий делитель кроме 1.

За решение каждой задачи выставляется максимум 5 баллов.

**Общая сумма** В сумме за все задачи выставляет не более 30 баллов.

За работу на практических занятиях (решение задач у доски, выполнение домашних заданий) выставляется максимум 30 баллов.

За ответ на экзамене выставляется максимум 40 баллов.

### Требования к рейтинг контролю (4 семестр)

**Контрольная работа 1.** Тема: логика предикатов, исчисление предикатов. Пример задания:

1. Сигнатура содержит три двухместных предикатных символа: $P, S, Sp$, и один одноместный: $M$. Носителем алгебраической системы $\mathfrak{A}$ является некоторое непустое множество людей, а предикатные символы интерпретируются так: $P(x, y)$ истинно, если $x$ — родитель $y$; $M(x)$ истинно, если $x$ — мужчина; $S(x, y)$ истинно, если $x$ и $y$ состоят в браке; $Sp(x, y)$ истинно, если $x$ и $y$ состояли

в браке когда-либо (может быть, до сих пор состоят). Написать замкнутую формулу, которая была бы истинна в алгебраической системе $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда каждый мужчина, имеющий в точности одного брата, обязательно имеет и хотя бы одну двоюродную сестру. Прокомментировать значение каждой подформулы.

2. Построить граф из шести вершин, на котором будет истинна формула, пояснить.

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)(E(x,y) \wedge E(z,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)\neg(E(x,y) \wedge E(y,x)) \wedge \\ \wedge (\forall x)(\forall y)(E(x,y) \to (\exists z)(E(y,z) \wedge E(z,x)))$$

3. Проверить, будет ли истинна следующая формула на алгебраической системе $(\omega, <; +, \times)$, ответ пояснить:

$$(\forall x)(\forall y)(x \times y < x + y \to (x \times y \approx x \vee x \times y \approx y))$$

4. Вывести секвенцию (можно использовать правила замены равных и конкретизации)

$$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge P(y,x) \to x \approx y), (\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \wedge P(z,y)) \vdash (\forall x)P(x,x)$$

За решение каждой задачи выставляется максимум 5 баллов.

**Контрольная работа 2.** Темы: формальная арифметика, сложность вычислений. Пример задания:

1. Вывести в арифметике Пеано следующую секвенцию: $\vdash \neg s(x) = x$. Допускается использовать правила конкретизации, индукции, замены равных, аксиомы для симметричности и транзитивности равенства. Допускается пропускать применения правил перестановки, а многократные утончения объединять в одно.
2. Написать клеточный автомат, который за линейное от длины входа время решает следующую задачу: по слову чётной длины в алфавите $\{a, b\}$ определить, верно ли что первая его половина не содержит букв $b$.
3. Описать недетерминированный алгоритм, который за полиномиальное время решает следующую задачу: по целым числам $a_1, \ldots, a_n, b$ определить, можно ли из $a_1, \ldots, a_n$ (каждое число используется не более одного раза) составить арифметическое выражение с операциями $+, -, \times$ так, чтобы его результат был равен $b$.

За решение каждой задачи выставляется максимум 5 баллов.

**Общая сумма** В сумме за все задачи выставляет не более 30 баллов.

За работу на практических занятиях (решение задач у доски, выполнение домашних заданий) выставляется максимум 30 баллов.

За ответ на экзамене выставляется максимум 40 баллов.

# VII. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

## Для аудиторной работы

| Наименование помещений | Материально-техническое оснащение помещений |
|---|---|
| Ауд. 318 (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35) | Набор учебной мебели, экран, проектор. |
| Ауд. 206 (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35) | Набор учебной мебели, экран, проектор. |
| Ауд. 205 (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35) | Набор учебной мебели, экран, проектор. |
| Ауд. 308 (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35) | Набор учебной мебели, экран проектор. |

## Для самостоятельной работы

| Наименование помещений | Материально-техническое оснащение помещений |
|---|---|
| Ауд. 201а (компьютерная лаборатория ПМиК) (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35) | Набор учебной мебели, доска маркерная, компьютер, сервер (системный блок), концентратор сетевой. |

# VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

| №<br>п/п | Обновленный раздел рабочей программы дисциплины | Описание внесённых изменений | Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения |
|---|---|---|---|