

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 20.11.2023 11:17:52  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:  
Руководитель ООП  
С.М. Дудаков  
2023 г.



Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Направление подготовки  
01.03.02 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Направленность (профиль)  
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для студентов 3, 4 курсов  
очная форма

Составитель:

д. ф. –м. н., Климков В.И., к.ф.-м.н. Васильев А.А.,

Тверь, 2023

## **I. Аннотация**

### **1. Цели и задачи дисциплины**

Цели освоения дисциплины:

- сформировать системное представление о математическом моделировании динамических систем;
- формирование умений построения математических моделей динамических систем и проведения анализа их функционирования.

Задачами освоения дисциплины являются:

- усвоение системы знаний о теоретических основах и методах построения математических моделей динамических систем;
- владение методами исследования функционирования динамических систем.

### **2. Место дисциплины в структуре ООП**

Дисциплина относится к Блоку 1, части, формируемой участниками образовательных отношений, раздела "Дисциплины профиля подготовки".

Находится в логической и содержательно-методической взаимосвязи и требует знаний и умений, формируемых в результате изучения алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений, уравнений математической физики и необходима как предшествующая, в частности, для дисциплин: численные методы, физика, механика сплошных сред, дисциплин по выбору.

Освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее для следующих дисциплин: математические модели и методы теории упругости; прикладные задачи вариационных исчислений; методы численного моделирования и анализа динамических систем.

**3. Объем дисциплины:** 10 зачетных единиц, 360 академических часов, в том числе:

**контактная аудиторная работа:** лабораторные работы **124** часов, в т.ч.

практическая подготовка **0** часов;

**контактная внеаудиторная работа:** контроль самостоятельной работы **10**,  
в том числе курсовая работа **10** часов;

**самостоятельная работа:** **226** часов, в том числе контроль **68** часов.

#### **4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ПК-1 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	ПК-1.1 Знает методы поиска информации, необходимой для проведения современных научных исследований ПК-1.2 Обрабатывает и интерпретирует данные современных научных исследований ПК-1.3 Формирует выводы по научным исследованиям на основе соответствующих данных
ПК-3 Способен разрабатывать и анализировать новые математические модели в областях естественных, технических и экономических наук с учетом возможностей современных информационных технологий и вычислительной техники	ПК-3.1 Знает методы математического моделирования. ПК-3.2 Разрабатывает и анализирует математические модели в области естественных, технических или экономических наук.
ПК-4 Способен использовать современные методы разработки алгоритмов и программного обеспечения для выполнения расчетов на базе математических моделей	ПК-4.1 Разрабатывает алгоритмы решения задач на базе математических моделей. ПК-4.2 Разрабатывает программное обеспечение для реализации алгоритмов решения задач на базе математических моделей

#### **5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения:**

экзамен - 6, 7 семестры; курсовая работа - 6 семестр.

6. Язык преподавания: русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**6 семестр**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Самостоятельная работа, в том числе Контроль (час.)
		Лекции	Лабораторные работы		Контроль самостоятельной работы (в том числе курсовая работа)	
			Всего	в т.ч. практическая подготовка		
1. Введение. Методологические принципы построения математических моделей динамических систем	22	0	6	0		16
2. Малые колебания динамических систем – линейная математическая модель	20	0	6	0		14
3. Математические линейные модели и методы решения задач о колебаниях динамических систем с одной степенью свободы	34	0	4	0	10	20
4. Математическая линейная модель параметрических колебаний систем	24	0	8	0		16
5. Математическая модель малых колебаний систем с двумя степенями свободы.	24	0	8	0		16
Математическая модель явления биений	26	0	10			16
6. Математическая модель нелинейных динамических систем	34	0	10	0		24

7. Методы Ляпунова-Пуанкаре решения нелинейных уравнений системы Ляпунова	32	0	12	0		20
<b>ИТОГО 6 сем.</b>	<b>216</b>	<b>0</b>	<b>64</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>142</b>

### III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем (в строгом соответствии с разделом II РПД)	Вид занятия	Образовательные технологии
1. Методологические принципы построения математических моделей динамических систем	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Разработка алгоритма решения задач и численная реализация на ЭВМ
2. Малые колебания динамических систем – линейная математическая модель	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. построению математических моделей. Разработка алгоритма решения задач и численная реализация на ЭВМ
3. Математические линейные модели и методы решения задач о колебаниях динамических систем с одной степенью свободы	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Разработка алгоритма решения конкретных задач. Численная реализация на ЭВМ
4. Математическая линейная модель параметрических колебаний систем	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Разработка алгоритма решения конкретных задач. Численная реализация на ЭВМ
5. Математическая модель малых колебаний систем с двумя степенями свободы. Математическая модель явления биений	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Разработка алгоритма решения конкретных задач. Численная реализация на ЭВМ

6. Математическая модель нелинейных динамических систем	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Разработка алгоритма решения конкретных задач. Численная реализация на ЭВМ
Методы Ляпунова-Пуанкаре решения нелинейных уравнений системы Ляпунова	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Разработка алгоритма решения конкретных задач. Численная реализация на ЭВМ
Курсовая работа	Лабораторные занятия. Самостоятельная работа	Изложение теоретического материала. Разработка алгоритма решения конкретных задач. Численная реализация на ЭВМ

В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций:

- традиционные лекции, практические занятия в диалоговом режиме;
- разработка алгоритмов решения задач и их численная реализация на ЭВМ; выполнение курсовых работ и индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

Дисциплина предусматривает выполнение курсовых и контрольных работ, письменных домашних заданий.

#### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

**ПК-1** Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.

**ПК-1.1** Знает методы поиска информации, необходимой для проведения современных научных исследований.

1. Теоретические основы математического моделирования динамических систем. Потенциальная и кинетическая энергии системы. Примеры для динамических систем с одной и двумя степенями свободы.

2. Диссипация энергии. Диссипативная функция и ее свойства. Примеры для конкретных динамических систем.

3. Вывод уравнений движения для динамических систем. Уравнения Лагранжа второго ряда.

4. Принцип Гамильтона. Вывод на его основе уравнений движения динамических систем.

5. Автономные и неавтономные динамические системы и их математические модели. Примеры для систем с двумя степенями свободы.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

- дан правильный и развернутый ответ – 3 балла;
- ответ содержит неточности – 2 балла;
- ответа правильного не дано – 0 баллов.

ПК-1.2 Обрабатывает и интерпретирует данные современных научных исследований.

1. Получить решение задачи о движении динамической системы с одной степенью свободы. Примеры.

2. Влияние диссипации энергии на характер движения динамических систем.

3. Математическая модель явления биений для динамических систем.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

- задача решена верно – 5 баллов;
- решение содержит неточности – 4 балла;
- решение содержит грубые ошибки – 2 балла.

ПК – 1.3. Формирует выводы по научным исследованиям на основе соответствующих данных.

1. Построить математическую модель движения, получить решение и дать анализ результатов решения для конкретной динамической системы
2. Построить семейство фазовых траекторий для динамических систем с учетом диссипации энергии

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

- задача решена верно – 5 баллов;
- решение содержит неточности – 4 балла;
- решение содержит грубые ошибки – 2 балла.

**ПК-3** Способен разрабатывать и анализировать новые математические модели в областях естественных, технических и экономических наук с учетом возможностей современных информационных технологий и вычислительной техники.

**ПК-3.1** Знает методы математического моделирования.

1. Дать построение математической модели параметрических колебаний динамических систем.
2. Дать построение математической модели нелинейных динамических систем. Примеры для систем с одной и двумя степенями свободы.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

- задача решена верно – 5 баллов;
- решение содержит неточности – 4 балла;
- решение содержит грубые ошибки – 2 балла.

**ПК-3.2** Разрабатывает и анализирует математические модели в области естественных, технических или экономических наук.

1. Построение математических моделей движения деформируемых динамических систем. Примеры.
2. Построение математической модели флаттера пластин

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:



- решение задачи обоснованно и верно – 5 баллов;
- решение содержит неточности – 4 балла;
- решение имеет грубые ошибки – 2 балла.

**ПК-4** Способен использовать современные методы разработки алгоритмов и программного обеспечения для выполнения расчетов на базе математических моделей

**ПК-4.1** Разрабатывает алгоритмы решения задач на базе математических моделей.

1. Составить алгоритм решения задачи нелинейных колебаний системы с одной степенью свободы, провести вычислительный эксперимент с использованием существующих пакетов программ.

2. С использованием существующих пакетов программ провести численное решение задачи о параметрических колебаниях динамических систем

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

- численное решение задачи обоснованно и верно – 5 баллов;
- численное решение содержит неточности – 4 балла;
- численное решение не обосновано и неверно – 2 балла.

**ПК-4.2** Разрабатывает программное обеспечение для реализации алгоритмов решения задач на базе математических моделей.

1. На основе метода Ляпунова составить алгоритм решения нелинейной задачи о колебании динамических систем с одной степенью свободы и дать численное решение задачи с использованием существующих пакетов программ.

2. На основе метода Пуанкаре составить алгоритм решения нелинейной задачи о колебаниях системы с одной степенью свободы и провести численный эксперимент с использованием существующих пакетов программ.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

- дано обоснованное и верное численное решение задачи – 5 баллов;

- численное решение содержит неточности –4 балла;
- численное решение не обосновано и имеет грубые ошибки – 2 балла.

## **V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### 1) Рекомендуемая литература:

#### а) Основная литература:

1. Данилов Н.Н. Математическое моделирование: учебное пособие / Н.Н. Данилов. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2014. – 98 с. – ISBN 978-5-8353-1633-5; [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=278827](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=278827)

Математическое моделирование технических систем: учебник / В.П. Тарасик. — Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2017. — 592 с. — (Высшее образование: Бакалавриат).- Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=773106>

2. Математическое моделирование и проектирование: учебное пособие / А.С. Коломейченко, И.Н. Кравченко, А.Н. Ставцев, А.А. Полухин ; под ред. А.С. Коломейченко. — М.: ИНФРА-М, 2018. — 181 с. — [www.dx.doi.org/10.12737/textbook\\_59688803c3cb35.15568286](http://www.dx.doi.org/10.12737/textbook_59688803c3cb35.15568286). - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=884599>

#### б) дополнительная литература:

1. Кудинов А.Н. Математическое и численное моделирование процесса потери устойчивости неоднородных оболочек. Учебное пособие./ Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 44 с. Тираж 100, 2,75 п.л.

2. Колокольцов, В.Н. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (Теория игр для всех): учебное пособие / В.Н. Колокольцов, О.А. Малафеев. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2012. — 624 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/3551>

3. Зубчинский А. А. Дискретные математические модели. Начальные понятия и стандартные задачи: учебное пособие / А.А. Рубчинский. - М.: Директ-Медиа, 2014. - 269 с. - ISBN 978-5-4458-3802-9; То же [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=240557](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=240557)

### 2) Программное обеспечение

<b>Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 249 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)</b>	
Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
FidesysBundle 1.4.43 x64	Акт приема передачи по договору №02/12-13 от 16.12.2013
Google Chrome	бесплатно
JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus 1.4.0	бесплатно
Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
MiKTeX 2.9	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно
Notepad++	бесплатно
OpenOffice	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64 bit)	бесплатно
R for Windows 3.3.2	бесплатно
STATGRAPHICS Centurion XVI.И	Акт приема-передачи № Tr024185 от 08.07.2010
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com);
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>;
3. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>.

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины:

Интернет – университет [http:// www. Intuit.ru](http://www.Intuit.ru).

## **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 баллов (30 баллов - 1-й модуль и 30 баллов - 2-й модуль).

Обучающемуся, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55–57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

### **1. Учебные пособия**

1. Кудинов А.Н., Катулев А.Н., Нефедов А.Н. Математические модели исследования задач экономики. Учебное пособие с грифом УМО. Тверь: ТвГУ, 10 п.л., 2009.
2. А.Н.Кудинов, А.Н.Катулев. Классические методы интегрирования дифференциальных уравнений: Учеб. Пособие. – Тверь: Твер. Гос. У-нт, 2005. – 260 с.

В итоге проводятся 3 контрольных мероприятия, распределение баллов между которыми составляет 30/30/40.

Контрольные работы проводятся в письменной форме.

Выполнение курсовых работ составляет 10 баллов.

## **2. Примерный перечень вопросов и типовых задач для подготовки к модулям.**

### **Модуль 1**

Тема 1. Методологические принципы построения математических моделей динамических систем.

1.1. Независимые или обобщенные координаты механических систем. Число степеней свободы.

1.2. Квадратичные формы и их свойства. Критерий определено положительной квадратичной формы.

1.3. Выражение для кинетической энергии консервативной системы около устойчивого положения равновесия.

1.4. Выражение для потенциальной энергии консервативной системы около устойчивого положения равновесия.

1.5. Выражение для диссипативной функции (функции рассеивание энергии системы).

Тема 2. Малые колебания динамических систем – линейная математическая модель.

2.1. Основные уравнения движения динамических систем. Уравнения Лагранжа.

2.2. Закон изменения энергии системы с учетом диссипации энергии.

2.3. Классификация механических систем. Консервативные и неконсервативные системы.

2.4. Нормальные координаты и главные колебания.

Тема 3. Математические линейные модели и методы решения задач о колебаниях динамических систем с одной степенью свободы

3.1. Свободные колебания консервативных систем и их свойства.

3.2. Свободные колебания систем с учетом сил сопротивления. Случаи малого и большого сопротивления.

3.3. Вынужденные колебания систем. Явления резонанса.

3.4. Вынужденные колебания систем с учетом сил сопротивления. Понятие коэффициента динамичности.

Тема 4. Математическая линейная модель параметрических колебаний систем.

4.1. Условия возникновения параметрических колебаний и основные уравнения движения.

4.2. Некоторые сведения из математической теории параметрических колебаний. Общее свойство.

4.3. Условие возникновения параметрических колебаний в системе. Параметрический резонанс.

4.4. Схематический расчет областей параметрического резонанса при периодическом изменении жесткости системы.

### **Типовые задачи**

№1. Составить математическую модель движения и определить частоту малых собственных колебаний маятника массой  $m$ , закрепленного на абсолютно жестком невесомом стержне длиной  $3\ell$  подкрепленного двумя одинаковыми пружинами на расстоянии  $\ell$  друг от друга.

№2. Составить математическую модель движения и определить частоту собственных колебаний для маятника массой  $m$ , закрепленного на абсолютно жестком невесомом стержне длиной  $2\ell$  и погруженного в сосуд, заполненный жидкостью. К середине стержня прикреплены две другие пружины жесткостью  $C$  каждая.

Количество баллов – 30: на текущий контроль -10,

модульный контроль – 20.

## **Модуль 2**

Тема 5. Математическая модель малых колебаний систем с двумя степенями свободы.

5.1. Основные уравнения движения и постановка задачи о колебании систем с двумя степенями свободы.

5.2. Общее решение системы уравнения движения. Теорема о корнях характеристического уравнения.

5.3. Частные решения уравнений движения. Определение коэффициентов влияния.

5.4. Уравнения частот. Главные частоты и главные колебания. Соотношение между главными и парциальными частотами.

5.5. Явление биения для систем с двумя степенями свободы. Математическая модель.

5.6. Решение уравнений, описывающих явление биения и основные свойства этих колебаний.

5.7. Вынужденные колебания систем с двумя степенями свободы. Случай, когда главные частоты не совпадают с частотой возмущающей силы. Основные их свойства. Динамический гаситель колебаний.

Тема 6. Математическая модель нелинейных динамических систем.

6.1. . Математическая модель колебаний маятника в среде с вязким трением. Метод точечных преобразований. Функция последования. Диаграмма Лемерея. Автоколебательные системы и их основные свойства

6.2. Метод фазовой плоскости исследования колебаний нелинейных динамических систем. Основные положения и способ построения фазовых траекторий. Примеры.

6.3. Методы решения нелинейных уравнений. Метод Ван-дер-Поля.

### **Типовые задачи**

№1. Составить математическую модель колебаний, определить главные частоты и главные колебания для системы, состоящей из двух грузов одинаковой массы  $m$ , находящихся на гладкой горизонтальной плоскости. Грузы прикреплены к неподвижным плоскостям при помощи пружины одинаковой жесткости  $C$  и соединены между собой пружиной – жесткость  $C_1$ .

№2. Методом А.М. Ляпунова (Ван-дер-Поля, Крылова и др.) найти периодическое решение для системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + x^3 \end{cases}$$

при начальных условиях:

$t = 0, x_{(0)} = C, y_{(0)} = 0$ , где  $C$  – малая величина.

Ограничиться двумя приближениями (кроме нулевого)

Количество баллов – 30: на текущий контроль -10,  
модульный контроль – 20.

### **3. Вопросы для подготовки к экзамену по дисциплине “Математическое моделирование динамических систем”**

Тема 1. Введение. Методологические принципы построения математических моделей динамических систем

1.1. Основные понятия моделирования. Классификация моделей и виды моделирования. Цели моделирования.

1.2. Квадратичные формы и их свойства. Выражения для кинетической и потенциальной энергии систем. Диссипативная функция.

Тема 2. Линеарная математическая модель - малые колебания динамических систем.

2.1. Основные уравнения движения

2.2. Нормальные координаты и главные колебания

Тема 3. Линеарные математические модели и методы исследования колебаний динамических систем с одной степенью свободы

3.1. Свободные колебания в консервативных системах

3.2. Вынужденные колебания систем

3.3. Метод фазовой плоскости.

Тема 4. Математическая модель параметрических колебаний систем.

4.1. Вывод уравнений движения. Основные положения и допущения.

4.2. Определение областей параметрического резонанса.

4.3. Параметрический резонанс.



Тема 5. Математическая модель малых колебаний систем с двумя степенями свободы.

5.1. Уравнения движения систем с двумя степенями свободы.

5.2. Общее решение. Теорема о корнях характеристического уравнения.

5.3. Уравнение частот. Парциальные системы.

5.4. Явление биения. Математическая модель этого явления и свойства этих колебаний.

Тема 6. Математическая модель нелинейных динамических систем.

6.1. Основные свойства нелинейных колебаний.

6.2. Уравнения движения и методы их решения.

6.3. Метод фазовой плоскости, метод точечных преобразований, метод приращивания.

6.4. Асимптотические методы: метод Ван-дер-Поля, метод возмущений.

6.5. Автоколебательные системы и их свойства.

Тема 7. Асимптотические методы нелинейной механики.

7.1. Системы Ляпунова нелинейных дифференциальных уравнений движения. Основные свойства.

7.2. Метод Ляпунова. Теорема о существовании периодических решений нелинейной системы.

7.3. Метод Пуанкаре. Основные положения.

7.4. Алгоритмы решений методов Ляпунова и Пуанкаре. Примеры.

#### **4. Тематика курсовых работ:**

**1.** Исследование свободных колебаний динамических систем с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления (сил вязкого трения и кулоновых сил сухого трения).

##### Задачи:

- построение математической модели колебаний динамической системы;
- выбор метода исследований;
- алгоритм решения задачи;
- проведение численного эксперимента

Литература: учебники [1], [2], [3].

Дополнительная литература: [1], [3], [4].

Дополнительные задачи - из соответствующих разделов сборника задач в доп. литературе [2], [3], [4].

**2.** Исследование вынужденных колебаний динамических систем с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления: при действии периодической возмущающей силы.

Задачи:

- построение математической модели колебаний динамической системы;
- выбор метода исследований;
- алгоритм решения задачи;
- проведение численного эксперимента

Литература: учебники [1], [2], [3].

Дополнительная литература: [1], [2], [3].

Дополнительные задачи - из соответствующих разделов в доп. литературе [2], [3].

**3.** Исследование вынужденных колебаний динамических систем с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления: при действии возмущающей силы любой функции времени.

Задачи:

- построение математической модели колебаний динамической системы;
- выбор метода исследований;
- алгоритм решения задачи;
- проведение численного эксперимента

Литература: учебники [1], [2], [3].

Дополнительная литература: [1], [3], [4].

Дополнительные задачи - из соответствующих разделов в доп. литературе [2], [3], [4].

**4. Определение областей параметрического резонанса для динамических систем с одной степенью свободы при действии параметрических нагрузок**

Задачи:

- построение математической модели колебаний динамической системы;
- выбор метода исследований;
- алгоритм решения задачи;
- проведение численного эксперимента

Литература: учебники [1], [2], [3].

Дополнительная литература: [1], [2], [3].

Дополнительные задачи - из соответствующих разделов в доп. литературе [2], [3], [4].

**5. Определение областей параметрического резонанса для динамических систем с одной степенью свободы при периодическом изменении жесткости и инерции системы.**

Задачи:

- построение математической модели колебаний динамической системы;
- выбор метода исследований;
- алгоритм решения задачи;
- проведение численного эксперимента

Литература: учебники [1], [2], [3].

Дополнительная литература: [1], [3], [3].

Дополнительные задачи - из соответствующих разделов в доп. литературе [2], [3], [4].

**6. Исследование свободных колебаний динамических систем с двумя степенями свободы. Определение условий наступления биений.**

Задачи:

- построение математической модели колебаний динамической системы;
- выбор метода исследований;
- алгоритм решения задачи;
- проведение численного эксперимента

Литература: учебники [1], [2].

Дополнительная литература: [1], [2], [3].

Дополнительные задачи - из соответствующих разделов в доп. литературе [2], [3], [4].

**7. Определение устойчивых периодических колебаний нелинейных динамических систем с одной степенью свободы с помощью метода фазовой плоскости и методом точечных преобразований.**

Задачи:

- построение математической модели колебаний динамической системы;
- выбор метода исследований;
- алгоритм решения задачи;
- проведение численного эксперимента

Литература: учебники [1], [2].

Дополнительная литература: [3], [4], [6].

Дополнительные задачи из соответствующих разделов в доп. литературе [2].

**5. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы и лабораторных работ.**

Основные типовые задачи

Тема 1. Введение. Методологические принципы построения математических моделей динамических систем.

Подготовка к лабораторным занятиям, подготовка к контрольной работе по построению математических моделей колебательных процессов.

Литература: учебники [1], [3], [5].

Дополнительная литература: [1], [3], [5].

Типовые задачи - из соответствующих разделов сборника задач в доп. литературе [2]

Тема 2. Малые колебания динамических систем – линейная математическая модель.

Изучение основ построения математических моделей колебательных процессов. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

Литература: учебники [1], [2], [3].

Дополнительная литература: [1], [4], [5].

Типовые задачи - из соответствующих разделов сборника задач в доп. литературе [2].

Тема 3. Математические линейные модели и методы решения задач о колебаниях динамических систем с одной степенью свободы

Подготовка к лабораторным занятиям, подготовка к контрольной работе по решению задач о линейных колебаниях систем с одной степенью свободы.

Литература: учебники [1], [2], [3].

Дополнительная литература: [1], [2], [3].

Типовые задачи - из соответствующих разделов сборника задач в доп. литературе [2]

Тема 4. Математическая линейная модель параметрических колебаний систем.

Построение математических моделей о колебаниях систем с одной степенью свободы (свободные, вынужденные, параметрические). Решение уравнений движения для конкретных колебательных систем.

Литература: учебники [1], [2], [3].

Дополнительная литература. [1], [2], [3], [4].

Типовые задачи - из соответствующих разделов сборника задач в доп. литературе [2], [3].

Тема 5. Математическая модель малых колебаний систем с двумя степенями свободы.

Подготовка к лабораторным занятиям, подготовка к контрольной работе по построению математических моделей колебаний систем с двумя степенями свободы.

Литература: учебники [1], [2].

Дополнительная литература: [1], [2], [3], [5].

Типовые задачи - из соответствующих разделов доп. литературы [2],

Тема 6. Математическая модель нелинейных динамических систем.

Подготовка к лабораторным занятиям, подготовка к контрольной работе  
а) по построению математических моделей нелинейных колебаний механических систем;

б) по решению задач о нелинейных колебаниях конкретных динамических систем.

Литература: учебники [1], [2].

Дополнительная литература: [3], [5], [6].

Типовые задачи - из соответствующих разделов в доп. литературе [2], [3],

Тема 7. Методы Ляпунова-Пуанкаре решения нелинейных уравнений системы Ляпунова.

Изучение основных методов решения нелинейных уравнений движения. Решение задач о нелинейных колебаниях конкретных динамических систем.

Подготовка к лабораторным занятиям, подготовка к контрольной работе.

Литература: учебники [1], [2].

Дополнительная литература: [5], [6].

Типовые задачи - из соответствующих разделов сборника задач в доп. литературе [2], [3].

## 7 семестр

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)					Самостоятельная работа, в том числе
		Лекции	Семинар-ские/Практические занятия/Лабораторные работы	Контроль	само-		

			Всего	в т.ч. практиче- ская под- готовка		Контроль (час.)
<u>Тема 1</u> Особенности математического моделирования динамики тонких оболочек и анализа их поведения	16	0	6	0		10
<u>Тема 2.</u> Математическая модель деформирования тонких оболочек.	22	0	10	0		12
<u>Тема 3.</u> Физическая модель деформирования тонких оболочек.	20	0	8	0		12
<u>Тема 4.</u> Математическая модель нелинейной динамики тонких оболочек первого приближения	24	0	10	0		14
<u>Тема 5.</u> Методы и алгоритмы решения задач динамики автономных нелинейных деформируемых систем.	34	0	14	0		20
<u>Тема 6.</u> Исследование динамики неавтономных нелинейных деформируемых систем.	28	0	12	0		16

<b>ИТОГО за 7 сем.</b>	<b>144</b>	<b>0</b>	<b>60</b>	<b>0</b>		<b>84</b>
<b>ИТОГО за 6,7 сем.</b>	<b>360</b>	<b>0</b>	<b>124</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>226</b>

### III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем (в строгом соответствии с разделом II РПД)	Вид занятия	Образовательные технологии
1 Особенности математического моделирования динамики тонких оболочек и анализа их поведения	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Решение задач
2. Математическая модель деформирования тонких оболочек.	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Решение задач
3. Физические модели деформирования тонких оболочек.	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Решение задач
4. Математические модели нелинейной динамики тонких оболочек	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Решение задач
5. Методы и алгоритмы решения задач динамики автономных нелинейных деформируемых систем.	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Решение задач. Проведение численного эксперимента
6. Методы и алгоритмы решения задач динамики неавтономных нелинейных деформируемых систем.	Лабораторные занятия	Изложение теоретического материала. Решение задач. Проведение численного эксперимента

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, лабораторных и практических занятий и различных форм самостоятельной ра-



боты студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: традиционные лекции, лабораторные и практические занятия в диалоговом режиме, проведение вычислительного эксперимента, выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

#### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

**ПК-1** Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.

ПК-1.1 Знает методы поиска информации, необходимой для проведения современных научных исследований.

1. Построить математическую модель деформирования тонких оболочек (цилиндрических, конических сферических и др.) при больших деформациях (нелинейная задача).

2. Выбрать и обосновать метод решения задачи динамики тонких оболочек под действием консервативных или неконсервативных сил.

ПК-1.2 Обрабатывает и интерпретирует данные современных научных исследований.

1. Провести анализ существующих нелинейных математических моделей динамики тонких оболочек и сделать выводы о границах и условиях их использования.

2. Провести анализ существующих методов решения задач динамики тонких оболочек (автономные и неавтономные системы) и обосновать использование метода для конкретной задачи.

ПК-1.3. Формирует выводы по научным исследованиям на основе соответствующих данных.

1. Дать выводы по использованию той или иной физической и математической модели для конкретной задачи динамики тонких оболочек.

2. На основе анализа существующих методов решения задач динамики тонких оболочек (автономные или неавтономные системы) дать рекомендации по их использованию для конкретной задачи.

Способ проведения по всем задачам ПК -1.1, ПК -1.2, ПК -1.3, – письменный.

Критерии оценивания:

- задача решена полностью и дано обоснование – 5 баллов;
- решение задачи содержит неточности и незначительные ошибки – 4 балла;
- решение задачи не обосновано и содержит грубые ошибки – 2 балла.

**ПК-3** Способен разрабатывать и анализировать новые математические модели в областях естественных, технических и экономических наук с учетом возможностей современных информационных технологий и вычислительной техники

**ПК-3.1** Знает методы математического моделирования.

1. Построить нелинейную математическую модель динамики тонкой оболочки первого приближения.

2. Построить нелинейную математическую модель динамики тонких оболочек более высшего уровня приближения (второго и др.).

**ПК-3.2** Разрабатывает и анализирует математические модели в области естественных, технических или экономических наук.

1. Разработать нелинейную математическую модель динамики ортотропной тонкой оболочки и определить границы ее применимости..

2. Разработать нелинейную математическую модель динамики двухслойной тонкой оболочки и дать анализ точности результатов в зависимости от параметров оболочки.

Способ проведения по всем задачам ПК -3.1, ПК -3.2 – письменный.

Критерии оценивания:

- дано полное обоснование решения задачи и задача решена полностью – 6 баллов;

- решение задачи недостаточно обосновано –5 баллов;
- решение задачи содержит неточности и недостаточно обосновано – 4 балл;
- решение задачи не обосновано и содержит грубые ошибки – 2 балла.

**ПК-4** Способен использовать современные методы разработки алгоритмов и программного обеспечения для выполнения расчетов на базе математических моделей

**ПК-4.1** Разрабатывает алгоритмы решения задач на базе математических моделей.

1. На основе метода Бубнова-Галеркина разработать алгоритм решения задачи о нелинейных собственных колебаниях тонкой цилиндрической оболочки.

2 На основе метода Пуанкаре разработать алгоритм решения задачи о вынужденных нелинейных колебаниях тонкой пластины.

**ПК-4.2** Разрабатывает программное обеспечение для реализации алгоритмов решения задач на базе математических моделей.

1. Разработать программное обеспечение по реализации алгоритма решения задачи о нелинейных собственных колебаниях тонкой цилиндрической оболочки. Выполнить вычислительный эксперимент в зависимости от параметров оболочки.

2. Разработать программное обеспечение по реализации алгоритма решения задачи о вынужденных нелинейных колебаниях пластины или тонкой цилиндрической оболочки. Выполнить вычислительный эксперимент в зависимости от параметров тонкостенной системы (пластины, оболочки).

Способ проведения по всем задачам ПК -4.1, ПК -4.2– письменный.

Критерии оценивания:

- задача решена полностью и выполнен численный эксперимент – 7 баллов;
- задача решена полностью, но вычислительный эксперимент выполнен не в полном объеме – 5 баллов;

- решение задач содержит неточности и вычислительный эксперимент не выполнен –3 балла;

- решение задачи содержит грубые ошибки и вычислительный эксперимент не выполнен - 2 балла.

## **V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### 1) Рекомендуемая литература:

#### а) Основная литература:

1. Данилов Н.Н. Математическое моделирование: учебное пособие / Н.Н. Данилов. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2014. – 98 с. – ISBN 978-5-8353-1633-5; [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=278827](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=278827)

2. Математическое моделирование технических систем: учебник / В.П. Тарасик. — Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2017. — 592 с. — (Высшее образование: Бакалавриат).- Режим доступа:

<http://znanium.com/go.php?id=773106>

3. Математическое моделирование и проектирование: учебное пособие / А.С. Коломейченко, И.Н. Кравченко, А.Н. Ставцев, А.А. Полухин ; под ред. А.С. Коломейченко. — М.: ИНФРА-М, 2018. — 181 с. —

[www.dx.doi.org/10.12737/textbook\\_59688803c3cb35.15568286](http://www.dx.doi.org/10.12737/textbook_59688803c3cb35.15568286). - [Элек-

тронный ресурс]. - Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=884599>

#### б) дополнительная литература:

1. Кудинов А.Н. Математическое и численное моделирование процесса потери устойчивости неоднородных оболочек. Учебное пособие./ Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 44 с. Тираж 100, 2,75 п.л.

2. Колокольцов, В.Н. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (Теория игр для всех): учебное пособие / В.Н. Колокольцов, О.А. Малафеев. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2012. — 624 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/3551>

3. Зубчинский А. А. Дискретные математические модели. Начальные понятия и стандартные задачи: учебное пособие / А.А. Рубчинский. - М.: Директ-

Медиа, 2014. - 269 с. - ISBN 978-5-4458-3802-9; То же [Электронный ресурс].

– Режим доступа: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=240557](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=240557)

## 2) Программное обеспечение

<b>Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 249 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)</b>	
Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
FidesysBundle 1.4.43 x64	Акт приема передачи по договору №02/12-13 от 16.12.2013
Google Chrome	бесплатно
JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus 1.4.0	бесплатно
Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
MiKTeX 2.9	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно
Notepad++	бесплатно
OpenOffice	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64 bit)	бесплатно
R for Windows 3.3.2	бесплатно
STATGRAPHICS Centurion XVI.И	Акт приема-передачи № Tr024185 от 08.07.2010
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com);

2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>;

3. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>.

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины:

Интернет – университет [http:// www. Intuit.ru](http://www.Intuit.ru).

## **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

### **1. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов и по подготовке к практическим занятиям:**

1. Особенности математического моделирования динамики тонких оболочек.

Основная литература [1] гл. 1, 2. стр. 3 -19.

Задачи типа: см. дополнительная литература [2], гл. 1, стр. 13.

2. Математическая и физическая модели деформирования тонких оболочек.

Основная литература [1] гл. 1, стр. 3 -19. Задачи типа с.

Дополнительная литература [1], лекция 1, стр. 1 – 25; [3], гл. 1, 2. стр.7 – 50.

3. Методы и алгоритмы решения задач динамики автономных нелинейных деформируемых систем

Основная литература [1] гл. 3, 4. стр. 20 - 41.

Задачи типа: см. дополнительная литература [2], гл. 2, стр. 75, стр. 86, 87, 89.

4. Методы и алгоритмы решения задач динамики неавтономных нелинейных деформируемых систем

Основная литература [1] гл. 3, 4, [2], [3].

Задачи типа: см. дополнительная литература [2], гл. 3, стр. 142, стр. 149; [1] лекция 4, стр. 60, 73.

### **2. Тематика занятий.**

Тема 1. Построение математических моделей динамики тонких оболочек.

Основное содержание:

- Некоторые сведения из теории поверхностей: первая и вторая квадратичные формы поверхности, дифференцирование координаты ортов, нормальные и главные
- Основные положения и теоремы выводы уравнений движения элемента тонкой оболочки.
- Формулировка граничных и начальных условий.

## Тема 2. Методы и алгоритмы решения задач динамики тонких оболочек.

- Приближенно-аналитические методы решения задач: метод Бубнова-Галеркина, метод Пуанкаре, метод возмущений, метод гармонического баланса и др.

В ходе занятий в рамках темы изучаются:

- Применение выше указанных методов к решению конкретных задач динамики тонких оболочек.
- Построение алгоритмов численного расчета основных характеристик динамики тонкостенных систем (оболочек, пластин).

## **3. Требования к рейтинг-контролю.**

### Модуль 1.

Контрольная работа.

Тематика:

1. Построение математических моделей нелинейной динамики тонких оболочек.

Типовой вариант задач:

Задача 1. См. доп. Литературу [2], стр. 13.

Задача 2. См. доп. Литературу [2], гл. 2, стр. 87.

2. Количество баллов – 15: на текущий контроль – 5, модульный контроль – 10.

### Модуль 2.

Контрольная работа.

Тематика:

1. Методы решения задач динамики тонких оболочек.

Типовой вариант задач:

Задача 1. См. доп. Литературу [2], гл. 3 стр. 142.

Задача 2. См. доп. Литературу [2], гл. 3, стр. 149.

Задача 3. См. доп. Литературу [2], гл. 3, стр. 73.

2. Количество баллов – 15: на текущий контроль – 5, модульный контроль – 10.

## **2. Вопросы для подготовки к экзамену:**

1. Первая квадратичная форма поверхности и ее значение в моделировании тонких оболочек.

2. Вторая квадратичная форма поверхности.

3. Нормальная и главные кривизны. Средняя и Гауссова кривизны.

4. Дифференцирования координатных ортов. Условия Кодацци-Гаусса.

5. Основные положения гипотезы Кирхгоффа-Лява.

6. Нелинейная математическая модель деформирования цилиндрической оболочки.

7. Уравнения совместности деформаций и их значение.

8. Физическая модель деформирования тонких оболочек. Усилия и моменты.

9. Потенциальная энергия упругой деформации тонких оболочек.

10. Вариационный принцип Лагранжа. Теорема Лагранжа-Дирихле.

11. Метод Бубнова-Галеркина. Нелинейная задача о собственных колебаниях пластин.

12. Метод возмущений для решения задач о собственных нелинейных колебаниях тонких оболочек.

13. Сущность метода Пуанкаре. Основные положения метода.

14. Метод гармонического баланса. Определение амплитудно-частотных характеристик нелинейных колебаний пластин и оболочек.

15. Вынужденные нелинейные колебания пластин. Метод Бубнова-Галеркина.

16. Метод Пуанкаре. Алгоритм построения периодических решений для автономных динамических систем.

17. Неавтономные квазилинейные системы. Решение нелинейных задач на основе метода Пуанкаре.

## **3. Типовые задачи для самостоятельной работы студентов**



Задача 1: Построить математическую модель нелинейных собственных колебаний тонкой цилиндрической оболочки: радиуса – R, толщиной – h, длиной – L с использованием теории поверхностей и законов механики деформируемого твердого тела и уравнений Лагранжа второго рода.

Выбрать метод исследования, составить алгоритм определения собственных частот цилиндрической оболочки.

Задача 2: С использованием вариационного принципа Лагранжа составить математическую модель собственных нелинейных колебаний тонкой пластины.

На основе метода Бубнова-Галеркина составить алгоритм определения собственных частот тонкой пластины при шарнирно опертых краях.

Задача 3: Определить амплитудно-частотную характеристику для нелинейных колебаний системы, уравнение движения которой имеют вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda^2 x + \mu x^3 = 0,$$

где  $\mu$  – малая величина ( $\mu \ll 1$ ),  $\lambda^2$  – квадрат собственной частоты линейной системы.

Решение провести с использованием метода возмущений и метода Бубнова-Галеркина. Результаты решений сравнить.

Задача 4: С использованием метода гармонического баланса и метода возмущений определить амплитудно-частотную характеристику нелинейных колебаний пластины, уравнение движения которой имеет вид:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_0^2 (\xi + \mu \xi^3) = 0,$$

где  $\omega_0^2$  – собственная частота пластины,  $\mu$  – малая величина ( $\mu \ll 1$ ).

Составить алгоритм расчета и сравнить полученные результаты.

## **VII. Материально-техническое обеспечение**

- компьютерный класс, оснащенный высокопроизводительными компьютерами с необходимым программным обеспечением и возможностью выхода в Интернет;

- лицензионное программное обеспечение – пакет символьной математики Maple; пакет 1ё Matlab;

- основные Интернет-ресурсы;

<http://www.maplesoft.com> - сайт компании Waterloo Maple (Maple);

<http://www.mathworks.com> - сайт компании MathWorks (Matlab);

<http://www.exponenta.ru>.

Для аудиторной работы.

Учебная аудитория № 7 170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый пере- улок, д.35	Оснащена комплектом учебном мебели и меловой доской.
---	--

Для самостоятельной работы.

Помещение для самостоятельной работы обуча- ющихся: Компьютерный класс №2 факультета ПМиК № 249 170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35	Набор учебной мебели, компьютер, проектор.
--	--

### **VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

<b>№ п.п.</b>	<b>Обновленный раздел рабочей программы дисциплины</b>	<b>Описание внесенных изменений</b>	<b>Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения</b>
1	11. 2) Программное обеспечение	Внесены изменения в список ПО	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета
2	V. 1) Рекомендуемая литература	Обновление ссылок на литературу	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета