Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 09.07.2025 12:28:18
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:
Руководитель ООП:
_____ С.М.Дудаков
«16» мая 2022 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
Системный анализ

Для студентов II и III курсов
Очная форма

Составители: к.ф.-м.н Сидорова О.И.

Тверь, 2022

Аннотация

1. Теория вероятностей и математическая статистика

Изучение дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» направлено на получение знаний о случайных явлениях и аналитических приемах работы с ними, овладение навыками вероятностно-статистического анализа эмпирической информации, формирование готовности к использованию полученных знаний в профессиональной деятельности

2. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины является изложение основных сведений о построении и анализе моделей, учитывающих случайные факторы.

Задачами освоения дисциплины являются:

- освоение фундаментальных понятий теории вероятностей и математической статистики;
- овладение основными методами постановки и решения вероятностно-статистических задач;
- приобретение навыков анализа статистической информации, включая получение оценок, построение прогнозов, отбора оптимальных моделей и результатов;
- формирование умений и навыков для самостоятельного освоения новых методов и инструментов вероятностно-статистического анализа.

2. Место дисциплины в структуре ООП

«Теория вероятностей и математическая статистика» является дисциплиной модуля «Математический» из базовой части учебного плана.

Для успешного усвоения курса необходимы знания основных понятий из математического анализа, линейной алгебры и обыкновенных дифференциальных уравнений, а также навыки решения основных задач, рассматриваемых в этих дисциплинах.

Владение теоретическими и практическими знаниями по данной дисциплине необходимо для успешного освоения таких курсов как «Теория случайных процессов», «Методы и алгоритмы оценивания параметров случайных процессов».

3. Объем дисциплины: 9 зачетных единиц, 324 академических часов, **в том числе:**

контактная аудиторная работа: лекции 62 часа, в т.ч. практическая подготовка 11 часов, практические занятия 62 часа, в т.ч. практическая подготовка 11 часов;

контактная внеаудиторная работа: контроль самостоятельной работы 20, в том числе курсовая работа 10, в том числе РГР - 10;

самостоятельная работа: 180 часов, в том числе контроль 74.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 Использует базовые знания в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности ОПК-1.3 Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических и естественных наук к решению задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	ОПК-2.1 Знает существующие математические методы и системы программирования ОПК-2.2 Использует существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач ОПК-2.3 Разрабатывает и реализует алгоритмы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения – экзамен 4, 5 семестр, курсовая работа - 5 семестр, РГР – 4 семестр.

6. Язык преподавания русский**.**

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная	Всего	Контактная работа (час.)	Самостоят

программа – наименование разделов и тем	(час.)	Лекции		Практические занятия		Контроль самостоятельной работы (в том числе курсовая работа, РГР)	ельная работа, в том числе Контроль (час.)
		всего	в т.ч. практическая подготовка	всего	в т.ч. практическая подготовка		

Дискретное вероятностное пространство. • Предмет теории вероятностей. Частота и ее свойства. • Дискретное вероятностное пространство. • События и операции над ними. • Простейшие свойства вероятностей событий. • Классическое определение вероятностей. • Геометрическое определение вероятностей. • Элементы комбинаторики. • Условная вероятность. Независимость событий. Формулы полной вероятности и Байеса. • Схема Бернулли, биномиальное распределение. • Предельные теоремы в схеме Бернулли.	46	8	0	12	0	-	26

Определение вероятностного пространства в общем случае • Алгебра событий. • Вероятностное пространство в слабом смысле. • Сигма-алгебра и порожденная сигма-алгебра. • Сигма-алгебра борелевских подмножеств. • Лемма о непрерывности вероятности. • Общее определение вероятностного пространства.	20	8	0	0	0	-	12
Случайные величины и векторы. • Случайная величина и ее распределение. Функциональные преобразования случайных величин. • Случайный вектор и его распределение. Функциональные преобразования случайных векторов.	46	8	0	8	0	2	28

Числовые характеристики случайных величин и векторов. • Математическое ожидание случайной величины и его свойства. • Моменты. • Дисперсия и ее свойства. • Коэффициент корреляции и его свойства. • Характеристики расположения и формы распределения. • Гильбертово пространство случайных величин. • Условное математическое ожидание и условное распределение.	66	12	0	12	0	2	40
Многомерное нормальное распределение	12	0	0	0	0	2	10

Предельные теоремы • Закон больших чисел. • Характеристические и производящие функции. • Центральная предельная теорема.	26	4	1	4	1	2	16
Цепи Маркова • Цепь Маркова и ее описание. • Классификация состояний. • Сходимость к стационарному распределению.	4	0	1	2	1	2	4
Статистическая структура. • Определение статистической структуры. Основная задача математической статистики. • Эмпирическое распределение и выборочные характеристики.	10	2	1	2	1	2	4
Точечные оценки параметров. • Точечные оценки параметров и их свойства. • Методы оценивания. • Неравенство Рао-Крамера.	22	6	1	4	1	2	10

Интервальные оценки параметров. • Интервальные оценки и их свойства. • Распределения вероятностей, связанные с нормальным распределением. • Интервальные оценки для параметров нормального распределения. • Общие методы построения доверительных интервалов.	22	4	1	6	1	2	10
Критерии согласия. • Общая методика построения критерия согласия. • Критерии Колмогорова и Пирсона. • Критерии однородности выборок. • Критерии независимости признаков.	22	4	3	6	3	2	10

Проверка статистических гипотез. • Основные понятия теории проверки статистических гипотез. • Лемма Неймана-Пирсона. • Проверка сложных гипотез.	24	6	3	6	3	2	10
ИТОГО	324	62	11	62	11	20	180

III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем *(в строгом соответствии с разделом II РПД)*	Вид занятия	Образовательные технологии
Дискретное вероятностное пространство.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Определение вероятностного пространства в общем случае.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Случайные величины и векторы.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач

Числовые характеристики случайных величин и векторов.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач 3. Самостоятельное изучение теоретического материала (гильбертово пространство случайных величин)
Многомерное нормальное распределение		1. Самостоятельное изучение теоретического материала
Предельные теоремы	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Цепи Маркова	Практические занятия	1. Самостоятельное изучение теоретического материала 2. Решение задач
Статистическая структура.	Лекции	1. Изложение теоретического материала
Эмпирическое распределение и выборочные характеристики.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Точечные оценки параметров.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Интервальные оценки параметров.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Критерии согласия.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач

Проверка статистических гипотез.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: традиционные лекции, практические занятия в диалоговом режиме, выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

Самостоятельная работа студентов организуется в форме решения стандартных заданий и заданий повышенной сложности по предложенным тематикам, а также выполнении расчетных или курсовых работ, письменных домашних заданий.

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Для проведения текущей и промежуточной аттестации:

4 семестр

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

Форма аттестации: ответ по темам курса (экзамен)
Способ аттестации: устный или письменный
Критерии оценки:

- *ответ целостный, верный, теоретически обоснованный. Ключевые понятия и термины полностью раскрыты. Факты и примеры в полном объеме обосновывают выводы – 30 баллов;*
- *теоретическая аргументация неполная или смысл ключевых понятий не объяснен – 20 баллов;*
- *допущены ошибки, приведшие к искажению смысла. терминологический аппарат раскрыт – 10 баллов;*
- *допущены ошибки, свидетельствующие о непонимании темы. Терминологический аппарат не раскрыт – 0 баллов;*
- *верно решены задачи, иллюстрирующая знание курса – 10 баллов;*
- *при решении задач, допущены арифметические ошибки – 5 баллов;*
- *при решении задач, допущены логические ошибки – 3 балла;*
- *решение задач неверно или отсутствует – 0 баллов.*

ОПК-1.2 Использует базовые знания в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности

Форма аттестации: решение задач по темам курса (модуль):

1. *классическое определение вероятности;*
2. *условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса;*
3. *схема Бернулли, биномиальное распределение;*
4. *теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона;*
5. *случайные величины: распределение и числовые характеристики;*
6. *случайные вектора: распределение и числовые характеристики.*

Способ аттестации: письменный

Критерии оценки:

- *решение полно и верно – 3 балла;*
- *решение верное, но недостаточно обоснованное или допущена арифметическая ошибка – 2 балла;*
- *в решении допущена логическая ошибка – 1 балл;*
- *решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

ОПК-1.3 Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических и естественных наук к решению задач профессиональной деятельности

Форма аттестации: решение задач по темам курса (домашние задания):

1. *классическое определение вероятности;*
2. *условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса;*
3. *схема Бернулли, биномиальное распределение;*
4. *теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона;*
5. *случайные величины: распределение и числовые характеристики;*
6. *случайные вектора: распределение и числовые характеристики.*

Способ аттестации: письменный

Критерии оценки:

- *доказательство полно и верно – 3 балла.*
- *доказательство о верное, но в полной мере не обоснованное – 2 балла.*
- *в доказательстве допущена логическая ошибка – 1 балл.*
- *доказательство отсутствует или неверно – 0 баллов.*

5 семестр

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

Форма аттестации: ответ по темам курса (экзамен)
Способ аттестации: устный или письменный
Критерии оценки:

- *ответ целостный, верный, теоретически обоснованный. Ключевые понятия и термины полностью раскрыты. Факты и примеры в полном объеме обосновывают выводы – 30 баллов;*
- *теоретическая аргументация неполная или смысл ключевых понятий не объяснен – 20 баллов;*
- *допущены ошибки, приведшие к искажению смысла. терминологический аппарат раскрыт – 10 баллов;*
- *допущены ошибки, свидетельствующие о непонимании темы. Терминологический аппарат не раскрыт – 0 баллов;*
- *верно решены задачи, иллюстрирующая знание курса – 10 баллов;*
- *при решении задач, допущены арифметические ошибки – 5 баллов;*
- *при решении задач, допущены логические ошибки – 3 балла;*
- *решение задач неверно или отсутствует – 0 баллов.*

ОПК-1.2 Использует базовые знания в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности

Форма аттестации: решение задач по темам курса (модуль):

1. *условное распределение и условное математическое ожидание;*
2. *характеристические функции;*
3. *центральная предельная теорема;*
4. *цепи Маркова;*
5. *точечные оценки: свойства и методы построения;*
6. *доверительные интервалы;*
7. *критерии согласия;*
8. *проверка статистических гипотез.*

Способ аттестации: письменный

Критерии оценки:

- *решение полно и верно – 3 балла;*
- *решение верное, но недостаточно обоснованное или допущена арифметическая ошибка – 2 балла;*
- *в решении допущена логическая ошибка – 1 балл;*

- *решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

ОПК-1.3 Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических и естественных наук к решению задач профессиональной деятельности

Форма аттестации: решение задач по темам курса (домашние задания):

1. *условное распределение и условное математическое ожидание;*
2. *характеристические функции;*
3. *центральная предельная теорема;*
4. *цепи Маркова;*
5. *точечные оценки: свойства и методы построения;*
6. *доверительные интервалы;*
7. *критерии согласия;*
8. *проверка статистических гипотез.*

Способ аттестации: письменный

Критерии оценки:

- *доказательство полно и верно – 3 балла;*
- *доказательство о верное, но в полной мере не обоснованное – 2 балла;*
- *доказательстве допущена логическая ошибка – 1 балл;*
- *доказательство отсутствует или неверно – 0 баллов.*

ОПК-2 Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач

ОПК-2.1 Знает существующие математические методы и системы программирования

Форма аттестации: ответ на вопросы по теме метод Монте-Карло

1. *область применения и возможности методов статистического моделирования;*
2. *алгоритмы генерации случайных величин с заданными распределениями вероятностей;*
3. *критерии проверки адекватности эмпирических выборок заданному распределению.*

Способ аттестации: устный

Критерии оценки:

- *правильный развернутый ответ – 5 баллов;*
- *правильный сжатый ответ – от 3 до 4 баллов;*
- *ответ в целом неправильный, но есть корректные идеи – 1 или 2 балла;*

- *ответ неверный – 0 баллов*

ОПК-2.2 Использует существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач

Форма аттестации: ответ на вопросы по теоретическим основам статистического анализа данных:

- *вычисление основных описательных статистик (среднее значение, дисперсия, медиана, экстремальные значения и размах выборки);*
- *построение гистограммы и её сглаживание;*
- *построение графика эмпирической функции распределения и доверительной полосы для неё;*
- *точечное оценивание параметров с помощью МНП;*
- *доверительное оценивание параметров;*
- *проверку согласия выборочных наблюдений с заданным теоретическим законом распределения;*
- *проверку однородности двух выборок;*
- *проверку гипотез о параметрах;*
- *корреляционный анализ.*

Способ аттестации: устный

Критерии оценки:

- *правильный развернутый ответ – 5 баллов;*
- *правильный сжатый ответ – от 3 до 4 баллов;*
- *ответ в целом неправильный, но есть корректные идеи – 1 или 2 балла;*
- *ответ неверный – 0 баллов*

ОПК-2.3 Разрабатывает и реализует алгоритмы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний

Форма аттестации: выполнение курсовой работы

1. *Сгенерировать две повторные выборки объема* $N \geq 100$ *из нормального распределения с заданными параметрами* a *и* σ^2*;*
2. *Для каждой выборки найти выборочные среднее значение, дисперсию, медиану, экстремальные значения и размах выборки;*
3. *Для первой выборки построить график эмпирической функции распределения и гистограмму. Сгладить гистограмму с помощью плотности нормального распределения, предварительно оценив параметры;*
4. *Для первой выборки построить график эмпирической функции распределения и доверительную полосу для нее;*

5. *Построить оценки параметров нормального распределения по МНП;*
6. *Построить доверительные интервалы для параметров нормального распределения:*
   a. для среднего при известной дисперсии (использовать значение σ^2);
   b. для среднего при неизвестной дисперсии;
   c. для дисперсии;
7. *По критерию χ^2 проверить согласие эмпирических данных с нормальным распределением;*
8. *По критерию χ^2 проверить однородность выборок;*
9. *Для заданных a_0 и σ_0 проверить гипотезы о параметрах нормального распределения: а) $\begin{matrix} H_0: a = a_0 \\ H_1: a \neq a_0 \end{matrix}$; b) $\begin{matrix} H_0: \sigma^2 = \sigma_0 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0 \end{matrix}$; c) $\begin{matrix} H_0: a_1 = a_2 = a \\ H_1: a_1 \neq a_2 \end{matrix}$;*
10. *Проверить выборки полученные выборки на некоррелированность. Выводы сделать с помощью точечной оценки и доверительного интервала для коэффициента корреляции.*

Способ аттестации: письменный

Критерии оценки:

- все расчеты произведены верно, выводы обоснованы и правильно аргументированы – 50 баллов;
- все расчеты произведены верно, выводы обоснованы, но в ответе присутствуют ошибки, свидетельствующие о недостаточном понимании некоторых разделов курса – 30-49 баллов;
- расчеты верны, но аргументация неполна или частично неверна – 10-29 баллов;
- верно решена только часть заданий, аргументация отсутствует – 1-9 баллов;
- решения не верны или отсутствуют – 0 баллов.

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

Основная литература:

1) Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. – 4-е изд., стер. – Москва : Дашков и К°, 2021. – 472 с. : ил., табл., схем., граф. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=684276
2) Калинина, В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В. Н. Калинина. — 2-е изд., перераб. и доп. —

Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 472 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02471-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/468770

3) Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина ; под ред. В. А. Колемаева. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юнити-Дана, 2017. – 352 с. : табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=692063

Дополнительная литература:

1) Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 479 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00211-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/468331

2) Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко. - 2-е изд. доп. - Ставрополь: Агрус, 2013. - 257 с.: схем., табл.; То же [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=277492

2) Программное обеспечение

Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 249 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	
Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
FidesysBundle 1.4.43 x64	Акт приема передачи по договору №02/12-13 от 16.12.2013
Google Chrome	бесплатно
JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus 1.4.0	бесплатно
Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
MiKTeX 2.9	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно

Notepad++	бесплатно
OpenOffice	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64 bit)	бесплатно
R for Windows 3.3.2	бесплатно
STATGRAPHICS Centurion XVI.II	Акт приема-передачи № Tr024185 от 08.07.2010
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно
Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 251 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	
Adobe Acrobat Reader DC - Russian	бесплатно
Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
Google Chrome	бесплатно
Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit)	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus 1.4.0	бесплатно
Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно
MiKTeX 2.9	бесплатно
MPICH2 64-bit	бесплатно
MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно

Notepad++	бесплатно
OpenOffice	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64-bit)	бесплатно
WCF RIA Services V1.0 SP2	бесплатно
WinDjView 2.1	бесплатно
R studio	бесплатно

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. **ЭБС «ZNANIUM.COM»** www.znanium.com;
2. **ЭБС «Университетская библиотека онлайн»** https://biblioclub.ru/;
3. **ЭБС «Лань»** http://e.lanbook.com.

Виртуальная образовательная среда ТвГУ (http://moodle.tversu.ru)
Научная библиотека ТвГУ (http://library.tversu.ru)

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Интернет-университет http://www.intuit.ru

1) Домашняя страница Черновой Н.И. http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova
2) Чернова Н.И. Теория вероятностей: Учебное пособие/СибГУТИ. - Новосибирск, 2009. – 128 с. http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/sibguti/tv-sibguti.pdf
3) Чернова Н.И. Математическая статистика: Учебное пособие/СибГУТИ.- Новосибирск, 2009.— 90 с.
4) http:// www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/sibguti/ms-sibguti.pdf
5) Национальный открытый университет ИНТУИТ http://www.intuit.ru

VI. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Учебное пособие:

1) Сидорова О.И., Захарова И.В., Хохлов Ю.С. Математическая статистика: практикум по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности. ГБОУ ВПО "Твер. гос. ун-т". - Тверь: Твер. гос. ун., 2018,126 с.

2) Хохлов Ю.С., Захарова И.В., Сидорова О.И. Классическая вероятность. Комбинаторика: Практикум по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика», часть 1. ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет». - Тверь: ТвГУ, 2016. 40 С. http://elibrary.ru/item.asp?id=27237516
3) Хохлов Ю.С., Захарова И.В., Сидорова О.И. Условная вероятность. Схема Бернулли: Практикум по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика», часть 2. ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет». - Тверь: ТвГУ, 2016. 39 С. http://elibrary.ru/item.asp?id=27271143
4) Хохлов Ю.С., Захарова И.В., Сидорова О.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие / Тверь, 2014. (Издание 2-е, переработанное и дополненное).

Рубежной формой контроля успеваемости студентов является экзамен, который проводится в устной или письменной форме.
Устный экзамен состоит из 2-х блоков:

- теоретическая часть 2 обязательных вопроса и вопросы из списка дополнительных.
- практическая часть: решение задач.

Письменный экзамен состоит из 2-х блоков:

- теоретическая часть: основные определения, формулировки теорем, лемм, утверждений (см. список дополнительных вопросов по курсу).
- практическая часть: решение задач.

Текущий контроль состоит из выполнения обязательных заданий, в т.ч. домашних работ, контрольных заданий и расчетной (курсовой) работы.

Промежуточный контроль включает 2 письменные работы и осуществляется в процессе обучения в соответствии со сроками, установленными учебным планом. По его результатам проставляются текущие баллы в учетных ведомостях, которые ведет преподаватель.

Результирующая оценка за семестр складывается из

- текущего рубежного контроля;
- самостоятельной работы студентов;
- экзаменационной оценки.

Распределения баллов по каждому модулю и рубежному контролю выглядит следующим образом:

Содержание работы		**Модуль 1**	**Модуль 2**
Контрольная работа		20	20
Сам. раб.	расчетная работа/ задания повыш. сложности	20	

	дом. задания	доп. баллы (не более 15)
Экзамен		40

Оценочные средства (4 семестр)

Тематика практических занятий

Тема 1. *Простейшие свойства вероятностей событий*.
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 2. *Классическое определение вероятностей. Геометрическое определение вероятностей. Элементы комбинаторики*.
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 3. *Условная вероятность. Независимость событий. Формулы полной вероятности и Байеса*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 4. *Схема Бернулли, биномиальное распределение. Предельные теоремы в схеме Бернулли*.
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 5. *Случайная величина и ее распределение. Функциональные преобразования случайных величин.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 6. *Случайный вектор и его распределение. Функциональные преобразования случайных векторов.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 7. *Числовые характеристики случайных величин.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 8. *Числовые характеристики случайных векторов.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.

Тематика стандартных задач.

1. Опираясь на свойства событий и вероятности, доказать, что
$\mathrm{P}((A \cup B) \setminus ABC) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB\overline{C})$**.**

2. Группа студентов, состоящая из 15 юношей и 20 девушек, делится случайным образом на пять подгрупп по 7 студентов в каждой. Найти вероятность того, что в каждой подгруппе будет по 3 юноши.

3. На отрезках $[0,2]$ и $[0,1]$ случайным образом и независимо друг от друга выбираются две точки x и y. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превосходит 0,5?

4. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,4, 0,3 и 0,5. Найти

вероятность своевременного выполнения студентом контрольных работ не менее чем по двум дисциплинам, в предположении, что контрольные работы выполняются независимым образом.

5. Вероятность поймать меченную рыбу равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 10 пойманных рыб будет не более 2-х меченных. Какое наиболее вероятное число меченных рыб встретится при таких условиях среди 10 рыб? Найти вероятность соответствующего числа успехов.

6. При игре в рулетку вероятность выпадения «зеро» равна $1/47$. Сколько раз нужно сыграть в рулетку, чтобы с вероятностью 0,9 «зеро» выпало не менее 3-х раз? (Использовать теорему Пуассона).

7. Пусть с.в. ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $\rho_\xi(x) = \begin{cases} cx, & x \in [1,4] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$.

   Найти:
   - постоянную c,
   - распределение с.в. $\eta = \xi^2$,
   - математическое ожидание и дисперсию с.в. η.

8. С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы. С.в. ξ_1 имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 4$, а с.в. ξ_2 – биномиальное распределение с параметрами $n = 8$ и $p = 0.5$. Найти коэффициент корреляции с.в. $4\xi_1 - \xi_2$ и ξ_2.

Примеры задач повышенной сложности.

Сложность*

1. Пусть A и B – независимые события, $\xi_1 = I_A$ и $\xi_2 = I_B$ – их индикаторы. Доказать независимость ξ_1 и ξ_2.
2. Случайные величины $X_1, \ldots, X_N$ независимы и одинаково распределены. Доказать некоррелированность случайных величин $Y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ и $Z = X_1 - Y.$
3. Есть 2 монеты: одна – симметричная, другая – с 2-мя гербами. Проводим n независимых испытаний следующего типа: случайно выбираем одну из монет, подбрасываем ее и отмечаем что появилось. Пусть S_n – число выпавших гербов. Найти распределение S_n.
4. С.в. ξ имеет геометрическое распределение с параметром p. Вычислить $P(\xi = m + k \mid \xi \geq m),\ m \geq 1,\ k \geq 1.$

5. С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Определим с.в. $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$. Найти плотность распределения случайного вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2)$.

Сложность**

1. С.в. ξ_p имеет геометрическое распределение с параметром p. Доказать, что в пределе при $p \to 0$ с.в. $\eta = p \cdot \xi_p$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1$.
2. С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения с.в. $\eta = \ln\left|\frac{\xi_1}{\xi_2}\right|$.
3. С.в. S_n равна числу успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха p. С.в. N не зависит от S_n и имеет распределение Пуассона с параметром λ. Найти распределение S_N.
4. С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют непрерывные распределения с плотностями $\rho_{\xi_1}(x)$ и $\rho_{\xi_2}(y)$. Найти распределение с.в. $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$.
5. С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют показательные распределения с параметром λ. Доказать, что с.в. $\eta_1 = \min(\xi_1, \xi_2)$ и $\eta_2 = \max(\xi_1, \xi_2) - \min(\xi_1, \xi_2)$ независимы.

Вопросы для подготовки к экзамену

Основные вопросы.

1. Дискретное вероятностное пространство.
2. События и операции над ними.
3. Вероятности событий и их свойства.
4. Условная вероятность. Независимость событий.
5. Формулы полной вероятности и Байеса.
6. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.
7. Предельные теоремы для биномиального распределения.
8. Общее определение вероятностного пространства.
9. Случайная величина и ее распределение. Классификация распределений.
10. Функциональные преобразования случайных величин.
1 1 . Случайный вектор и его распределение. Классификация распределений.
12. Функциональные преобразования случайных векторов. Формула свертки.
13. Независимые случайные величины.
14. Математическое ожидание дискретных случайных величин и его свойства.
15. Определение математического ожидания случайной величины в общем случае.
16. Свойства математических ожиданий.

17. Числовые характеристики случайных величин. Дисперсия и коэффициент корреляции.
18. Гильбертово пространство случайных величин. Задача о наилучшей оценке.

Дополнительные вопросы (знать наизусть)

1. Относительная частота появления события.
2. Статистическая устойчивость частот.
3. Определение дискретного вероятностного пространства.
4. Задача на классическое определение вероятности.
5. Определение события в дискретном вероятностном пространстве .
6. Благоприятный элементарный исход.
7. Что значит, что событие произошло (формально) ?
8. Операции над событиями (формально и неформально): достоверное и невозможное события, объединение, пересечение, несовместные события, сумма, противоположное, разность, одно событие влечет другое.
9. Алгебра событий.
10. Определение вероятности события.
1 1 . Основные свойства вероятностей (1-6) .
12 . Геометрическое определение вероятности.
13. Размещения, перестановки и сочетания.
14. Условная вероятность.
15 . Теорема умножения.
16. Независимость событий.
17. Полная группа событий.
18. Формула полной вероятности.
19. Формула Байеса.
20. Схема Бернулли (формально и неформально) .
2 1 . Биномиальное распределение (где возникает и формула).
22. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
23. Теорема Пуассона.
24. Определение вероятностного пространства в общем случае.
25. Определение σ-алгебры.
26. Порожденная σ-алгебра. Борелевская σ-алгебра.
27. Определение случайной величины.
28. Распределение случайной величины.
29. Функция распределения и ее основные свойства (1-5) .
30 . Дискретное распределение и его свойства (1-3) .
3 1 . Непрерывное распределение и его свойства (1-7) .
32. Примеры стандартных распределений: Бернулли, биномиальное, геометрическое, пуассоновское, равномерное, показательное, нормальное.
33. Определение случайного вектора.
34. Распределение случайного вектора.
35 . Дискретный случайный вектор, таблица его распределения,

свойства дискретного распределения.
36. Случайный вектор с непрерывным распределением. Плотность распределения случайного вектора и ее свойства.
37. Маргинальные (одномерные) распределения и их вычисление.
38. Независимость случайных величин (в общем случае и для непрерывных и дискретных с.в.).
39. Формула свертки в дискретном и непрерывном случаях.
40. Математическое ожидание дискретной случайной величины.
41 . Математическое ожидание непрерывной случайной величины.
42 . Основные свойства математического ожидания.
43. Дисперсия и ее основные свойства.
44. Ковариация. Некоррелированные случайные величины.
45 . Коэффициент корреляции и его свойства.
46. Определение момента случайной величины.
47. Квантиль порядка p для случайной величины. Медиана.
48. Сходимость в среднем квадратическом.
49. Постановка задачи о наилучшей линейной оценке.
50. Лемма о перпендикуляре.

Типовые задачи на модуль

Модуль 1.

1. Используя свойства событий и вероятности, доказать, что
$\mathrm{P}(A \cup B \cup C \setminus ABC) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(BC) - \mathrm{P}(AC)$
2. К одному и тому же причалу подходят 2 корабля. Времена их прихода независимы и равновозможны в течение суток (24 часа). Найти вероятность того, что одному из кораблей придется ждать освобождения причала, если стоянка первого длится 1 час, 2-го - 2 часа.
3. 12 яблок, 3 апельсина и 9 бананов раскладываются в 3 пакета по 8 фруктов в каждом. Найти вероятность того, что в каждом пакете будет по апельсину.
4. Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50% первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что некоторый застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования.
5. Вероятность поражения цели равна 2/5. По цели производится 8 независимых выстрелов. Какова вероятность того, что будет не менее 2-х попаданий. Оценить наиболее вероятное число попаданий в цель при этих условиях и найти соответствующую вероятность.

Модуль 2.

1. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет распределение с плотностью

$$\rho_\xi(x,y)=\begin{cases}C(2x+3y), & x,y\in[0,1]\\ 0, & \textit{иначе}\end{cases}$$

Найти:

1) константу C;
2) распределение с.в. $\eta=\xi_2/\xi_1$;
3) коэффициент корреляции $\rho(\xi_1,\xi_2)$ с.в. ξ_1 и ξ_2.

2. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a=2$ и $\sigma^2=4$. Найти:
   1) константу C такую, что $P(|\xi|<C)=0.99$;
   2) математическое ожидание и дисперсию с.в. $\eta=2\xi-1$;

Задания повышенной сложности.

Задания повышенной сложности служат для проверки степени усвоения теоретического материала. Они имеют практическую направленность и иллюстрируют возможности прикладного применения результатов теории вероятностей. Выполнение этих заданий обязательно для студентов, претендующих на отличную оценку по предмету.

Решение задач должно быть подробно описано, все промежуточные выкладки обоснованы.

Примерные варианты задач.

Вариант 1

В комнате ожидания стоят два кресла. Двое уселись сразу, а третий ждет освобождения какого- либо кресла. Времена сидения - независимые величины, имеющие показательное распределение с параметром $\lambda>0$.

Найти:

1) Распределение времени, когда система занята, если третий человек всегда выбирает кресло, которое занимал первый человек.
2) Вероятность того, что третий встанет раньше второго или первого.
3) Плотность распределения времени ожидания освобождения кресла для третьего человека.

Вариант 2

Мы наблюдаем за ежедневным изменением цены некоторого финансового актива (например, акции) в течение n дней.

Пусть $P(1),P(2),\ldots,P(n)$ цену актива в i- тый день. Предполагается, что приращения цен $X(i)=P(i+1)-P(i), i=\overline{1,n-1}$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами (a,σ^2).

Нас интересует распределение так называемой относительной Скорости изменения цены актива (rate of change).

$ROC = \frac{P_t}{P_x}$, где P_t - цена сегодняшнего дня, P_x - цена $n-(x+1)$ дней назад.

Найти распределение *ROC.*

Вариант 3

В небольшом магазине работает только одна касса, причем время обслуживания клиента в кассе имеет показательное распределение с параметром $\mu > 0$.

Интервалы времени между ”вызовами” – т.е. обращениями совершивших покупки в кассу

не зависят от времен обслуживания и друг от друга и распределены показательно с параметром $\lambda > 0$.

Найти:

1) Вероятность того, что второй подошедший побудет в магазине меньше первого.
2) Вероятность того, что второму подошедшему не придется ждать освобождения кассы.
3) Плотность распределения времени ожидания освобождения кассы для второго покупателя.

Вариант 4

Функция распределения времени жизни для некоторой группы людей имеет вид: $F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$, $\lambda > 0, x \geq 0$;

Найти вероятность того, что из трех ”наугад” выбранных человек третий проживет дольше первого и второго, если продолжительности жизни для разных людей – не зависят друг от друга.

Вариант 5

На улице есть две телефонные кабины, стоящие рядом. Времена разговора - для разных людей независимы имеют показательное распределение с параметром $\mu > 0$. Интервалы времени между ”вызовами” – т.е. приходами желающих позвонить не зависят от времен обслуживания и друг от друга и распределены показательно с параметром $\lambda > 0$.

Найти распределение полного времени работы такой системы, если к телефонам последовательно подходят два человека, причем первый всегда идет в тел. Кабину под номером 1, а второй, независимо от того свободна ли первая кабина в момент его прихода или нет, идет в кабину под номером 2.

Вариант 6

Мы наблюдаем за ежедневным изменением конечной цены некоторого финансового актива (например, акции) в течение n дней.

Пусть $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ определяют цену актива в i- тый день. Предполагается, что приращения цен $X(i) = P(i+1) - P(i), i = \overline{1, n-1}$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами (a, σ^2).

Нас интересует распределение индикатора финансового рынка под названием Момент (Momentum):

$M = P_t - P_x$,

где P_t - цена сегодняшнего дня, P_x - цена $n - (x+1)$ дней назад.

Вариант 7

К автобусной остановке каждый час должен подходить автобус (в 11 часов, в 12 часов, в 13 часов, и т.п.), однако он может запаздывать, но максимум на 1 час.

Пусть времена запаздываний автобуса – не зависят друг от друга, имеющие

1) равномерное распределение;
2) бета – распределение, т.е. распределение с плотностью
$$\rho_\xi(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot (1-x)^{\alpha-1} \cdot x^{\beta-1}, \quad 0 \le x \le 1, \ \alpha, \beta > 0;$$

Человек приходит на остановку в любой момент между полуднем и часом дня.

Найти:

a) Вероятность того, что человек успеет на полуденный автобус;

b) Распределение времени ожидания полуденного автобуса;

c) Распределение времени ожидания ближайшего автобуса.

Вариант 8

Мы наблюдаем за ежедневным изменением конечной цены некоторого финансового актива (например, акции) в течение n дней.

Пусть $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ определяют цену актива в i- тый день. Предполагается, что приращения цен $X(i) = P(i+1) - P(i), i = \overline{1, n-1}$ независимы и

пусть $U(i) = \max(0, X(i))$ и $D(i) = -\min(0, X(i))$ определяют положительные и отрицательные скачки цен (рост и падение цен) соответственно.

Предположим, что $U(i)$ и $D(i)$ независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром $\lambda > 0$ соответственно. Нас интересует распределение индикатора финансового рынка под названием Индикатор относительной силы (relative strength index).

$$RSI = \frac{\sum_{i=1}^{n} U(i)}{\sum_{i=1}^{n} U(i) + \sum_{i=1}^{n} D(i)}$$

Найти распределение RSI.

Вариант 9

Время жизни для некоторой группы людей имеет непрерывное распределение с плотностью вида:

$$f(x) = \frac{c}{(1+x)^2}, \quad 0 \le x \le 100.$$

Человек в возрасте a лет страхуется на b лет на следующих условиях: если он умирает в течение этого срока, то его родственникам выплачивается сумма m рублей, иначе ничего. Сколько должна стоить такая страховка, если страхуется n человек в возрасте a лет, на собранную сумму j раз в год начисляются проценты по ставке i % сложных годовых, а вероятность разорения компании не должна превышать 3%.

Вариант 10

Функция распределения времени жизни для некоторой группы людей имеет вид:

1) $F(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$, $x \ge 0$;

2) $F(x) = \frac{x^2}{10000}$, $0 \le x \le 100$

Найти распределения максимальной и минимальной продолжительности жизни для двух ”наугад” выбранных человек, если продолжительности жизни для разных людей – не зависят друг от друга.

Вариант 11

Двое договорились встретиться между a и b часами. Найти распределение времени ожидания, если

1) Каждый равновозможно и независимо от другого приходит в любой момент времени между a и b часами.

2) a=0, b=1. Времена прихода не зависят друг от друга и имеют бета – распределение, т.е. распределение с плотностью

$$\rho_{\xi}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot(1-x)^{\alpha-1}\cdot x^{\beta-1},\quad 0\le x\le 1,\ \ \alpha,\beta>0;$$

Методические указания для выполнения расчетно-графической работы

Тема

Метод Монте-Карло (по вариантам).

Примерное задание на работу

ФИО	Задание	Требования
Иванов И.И.	Написать программу вычисляющую площадь фигуры, ограниченной линиями y=2; x=0; y=x+1;y=1-x; -1 ≤x ≤1. Использовать замечания 1,11	На входе: число наблюдений и дополнительные параметры, если они есть (см. свой вариант). На выходе: площадь фигуры и относительная погрешность.

Замечание 1:

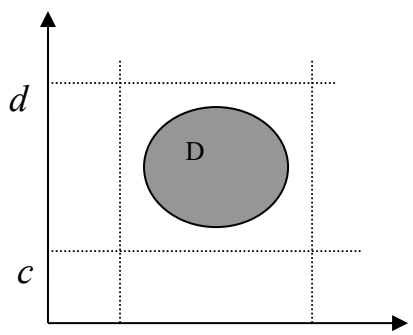
Если случайная величина (с.в.) ξ имеет ***равномерное распределение*** на отрезке $[0,1]$, то с.в. $\eta=a+(b-a)\xi$ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$.

Замечание 11:

Пусть необходимо найти площадь некоторой области *D*.

Для этого

1. Строим прямоугольник со сторонами *ab* и *cd*, содержащий область *D*.



a *b*

2. Рассмотрим независимые случайные величины ξ и η, где с.в. ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$; с.в. η имеет равномерное распределение на отрезке $[c,d]$.

   Введем с.в. $\varphi = \begin{cases} 1, & \textit{если } (\xi,\eta) \in D \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$

   Вычислим математическое ожидание с.в. φ

   $M\varphi = 1 \cdot P((\xi,\eta) \in D) + 0 \cdot P((\xi,\eta) \notin D) \Rightarrow M\varphi = P((\xi,\eta) \in D) = \dfrac{S_D}{S_{abcd}}$, где S_D, S_{abcd} - площади области *D* и треугольника *abcd*, соответственно. При вычислении вероятности $P((\xi,\eta) \in D)$ мы воспользовались геометрическим определением вероятности, поскольку случайный вектор (ξ,η) имеет равномерное распределение в области *D*.

   Следовательно, $S_D = S_{abcd} \cdot M\varphi$.

   Пусть $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ - полученные ("наблюденные") значения случайного вектора (ξ,η). Таким образом мы имеем *n* значений с.в. φ: $z_1, z_2, \ldots, z_n$, где $z_i = \begin{cases} 1, & \textit{если } (x_i,y_i) \in D \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

   Отсюда получаем, что $S_D \approx S_{abcd} \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}$

Оценочные средства (5 семестр)

Тематика практических занятий

Тема 1. *Условное математическое ожидание и условное распределение.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание
Тема 2. *Характеристические и производящие функции.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 3. *Центральная предельная теорема.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 4. *Цепи Маркова.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 5. *Выборка, выборочное распределение и выборочные характеристики.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 6. *Точечные оценки параметров и их свойства: несмещенность и состоятельность.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.

Тема 7. *Эффективные оценки. Неравенство Рао-Крамера*.
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 8. *Методы построения оценок*.
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 9. *Интервальные оценки параметров: точный и асимптотический подходы*.
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 10. χ^2*-критерий согласия Пирсона*. χ^2*-критерии независимости и однородности*.
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 11. *Проверка простых гипотез*. *Лемма Неймана-Пирсона.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.
Тема 12. *Проверка сложных гипотез. Критерий отношения правдоподобий.*
Форма контроля: обязательное домашнее задание.

Тематика стандартных задач

1. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X,Y) имеет вид

X / Y	-2	-1	1
-1	0,25	0,2	0,1
0	0,1	0,2	0,15

Найти: коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$ случайных величин X и Y.

2. Для данных из п.1. найти распределение сл. вел. $Z = X * Y$. Найти квантиль порядка $p = 0.8$ для случайной величины Z.

3. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\theta = 1 + 2\xi$. Найти с ее помощью $M(\xi)$.

4. Предлагается страховка от несчастного случая, по которой будут выплачивать 1000 ед. с вероятностью 0,2 и ничего с вероятностью 0,8. Сейчас такая страховка стоит 10 ед. Продано 1000 полисов. Найти вероятность безубыточной деятельности компании при таких условиях.

5. Некто стреляет по мишени. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,5. При неудачном выстреле вероятность попадания снижается до 0,4, а при удачном – возрастает до 0,6. Найти вероятность попадания при третьем выстреле и после длительной стрельбы по мишени.

6. Получена выборка объема $N = 20$ из нормального распределения:

,5	,9	,5	,5	,1	,2	,9	,4	,4	,2	,6	,6	,1	,2	,5	,1	,8	,8	,0	,0

Построить вариационный ряд выборки и гистограмму (взять 5 равных интервалов). Найти выборочное среднее выборочную дисперсию и

выборочную медиану. Построить доверительный интервал уровня $\gamma = 0{,}95$ для среднего при неизвестной дисперсии.

7. $X = (X_1, \ldots, X_N)$ – повторная выборка из распределения с плотностью $\rho_\xi(x) = \begin{cases} 2/\Theta \cdot xe^{-x^2/\Theta}, x \in [0,\ \infty) \\ 0, \qquad \text{иначе} \end{cases}$, где $\Theta > 0$ – неизвестный параметр распределения. Построить оценку для параметра Θ по методу наибольшего правдоподобия и проверить ее на несмещенность и состоятельность.

8. Предполагается, что случайная величина ξ принимает значения 1, 2 и 3 с вероятностями Θ, Θ, $1-2\Theta$ соответственно, $0 < \Theta < 1/2$. Проведено 60 независимых измерений этой величины в одинаковых условиях. При этом 1 появилась 28 раз, 2 – 12 раз, 3 – 20 раз. Согласуются ли данные результаты с предполагаемым распределением.

9. Пусть $X = (X_1)$ есть выборка объема $N = 1$ из показательного распределения с параметром $\ln(\lambda)$. Доказать, что случайная величина $T(X, \theta) = X_1 \cdot \ln(\lambda)$ есть центральная статистика и построить с ее помощью доверительный интервал для параметра λ.

Примеры задач повышенной сложности.

Сложность*

6. С.в. ξ_1, ξ_2 и ε независимы, ξ_1, ξ_2 имеют показательное распределение с параметром λ, а ε – распределение Бернулли с параметром p. Используя формулу полной вероятности найти распределения с.в. $\eta = \varepsilon \cdot \xi_1 + (1-\varepsilon) \cdot \xi_2$.
7. С.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют характеристическую функцию $\varphi(t)$. С.в. N не зависит от $\{\xi_j\}$, принимает целые неотрицательные значения и имеет производящую функцию $P(z)$. Положим $S_0 = 0, \ldots, S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Найти характеристическую функцию с.в. S_N.
8. Пусть $(X_n, n \geq 0)$ – однородная конечная цепь Маркова, в которой для каждого i существуют пределы $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n)$ переходных вероятностей $P_{ij}(n)$. Доказать , что $\{\pi_j\}$ – это распределение вероятностей.
9. $X = (X_1, \ldots, X_N)$ – повторная выборка из генеральной совокупности с монотонной и непрерывной ф.р. $F(y)$. Доказать несмещенность и состоятельность выборочной медианы $\hat{X}_{1/2}$.
10. $X = (X_1, \ldots, X_N)$ – повторная выборка из генеральной совокупности с нормальным распределением. Проверяется гипотеза $H_0 : a = 1,\ \sigma^2 = 1$ против альтернативы $H_1 : a = 2,\ \sigma^2 = 1$. Для проверки используется тест с

критической областью $K=\left\{x=(x_1,\ldots,x_N)\colon \sum_{i=1}^{25} x_i > c\right\}$. При каком c тест имеет уровень $\alpha = 0{,}1$. Вычислить мощность такого теста.

Сложность**

6. Какому распределению соответствует характеристическая функция $\varphi(t)=e^{\cos t-1}$?
7. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на $[-\theta, \theta]$, где θ – неизвестный параметр. $X=(X_1,X_2,\ldots X_N)$ – повторная выборка. Проверить на несмещенность оценку $\hat{\theta}=\frac{1}{2}\left(\max_j |X_j| + \min_j |X_j|\right)$.
8. Пусть $X=(X_1,X_2,\ldots X_N)$ – повторная выборка из смещенного показательного распределения с параметром $\lambda>0$, т.е. $\rho(y,\lambda)=\begin{cases} e^{\lambda-x} & \text{если } x\geq\lambda \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Доказать, что статистика $T(X,\lambda)=N\cdot\left(X_{(1)}-\lambda\right)$ является центральной и построить с ее помощью доверительный интервал уровня γ для параметра λ.
9. $X=(X_1,\ldots,X_N)$ – повторная выборка из генеральной совокупности с нормальным распределением $N(a,\sigma^2)$. Построить в явном виде критерий отношения правдоподобия для проверки гипотезы $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ против альтернативы $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$.
10. Выписать в общем виде критерий уровня α для различения гипотез H_0 (равномерное на $[-1,1]$ распределение) и H_1 (стандартное нормальное распределение) и найти его мощность.

Вопросы для подготовки к экзамену

Основные вопросы.

1. Гильбертово пространство случайных величин.
2 . Задача о наилучшей линейной оценке.
3. Условное распределение и условное математическое ожидание и их свойства.
4. Функция регрессии и ее экстремальное свойство.
5 . Многомерное нормальное распределение.
6. Закон больших чисел.
7. Характеристические и производящие функции и их свойства.
8. ЦПТ для независимых и одинаково распределенных случайных величин.
9. Цепи Маркова: основные понятия, классификация состояний, предельные теоремы.

10. Статистическая структура. Примеры параметрических структур.
11 . Выборка, эмпирическое распределение, выборочные характеристики.
12 . Оценки параметров и их свойства.
13. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия.
14. Неравенство Рао-Крамера и оптимальные оценки.
15. Интервальные оценки. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.
16. Построение доверительных интервалов с помощью центральных статистик и асимптотически нормальных оценок.
17. Критерии согласия. Критерий Колмогорова и $\chi 2$-критерий Пирсона.
18. Проверки гипотез об однородности и независимости.
19. Основные понятия проверки статистических гипотез. Лемма Неймана-Пирсона.
20. Проверка сложных гипотез. Критерий отношения правдоподобия.
21. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения.

Дополнительные вопросы (знать наизусть)

1. Гильбертово пространство случайных величин.
2. Сходимость в среднем квадратическом.
3. Задача о наилучшей линейной оценке.
5. Лемма о перпендикуляре.
6. Условное распределение и условное математическое ожидание в дискретном случае.
7. Условное распределение и условное математическое ожидание в непрерывном случае.

7. Условное распределение для двумерного нормального распределения.
8. Функция регрессии и ее эктремальное свойство.
9. Многомерное нормальное распределение; определение плотности и вероятностный смысл параметров.

10. Сходимость по вероятности.
11. Что такое закон больших чисел?
12. Неравенство Чебышева.
13. З.Б.Ч. для н.о.р.с.в.
14. Теорема Бернулли.
15. Определение характеристической функции и ее вычисление в дискретном и непрерывном случае.
16. Вычисление характеристической функции для линейного преобразования и суммы независимых св.
17. Теорема едиственности.
18. Теорема непрерывности.

20. Характеристические функции для стандартных распределений: биномиальное, -пуассоновское, -нормальное (общий случай и стандартное).
21. Слабая сходимость функций распределений.
22. Что такое центральная предельная теорема?
23. Ц.П.Т. для н.о.р.с.в.
24. Определение цепи Маркова.
25. Однородная цепь Маркова.
26. Начальное распределение.
26. Вероятности перехода и их свойства (в однородном случае).
27. Распределение цепи на n-ом шаге (в однородном случае).
28. Стационарное распределение.
29. Основная задача математической статистики.
30. Определение статистической структуры.
31. Параметрические и непараметрические структуры.
32. Примеры параметрических структур: биномиальная, пуассоновская, показательная, нормальная.
33. Выборка, повторная выборка.
34. Вариационный ряд, порядковые статистики.

35. Эмпирическое распределение, эмпирическая функция распределения, гистограмма.
36. Выборочное среднее, выборочная дисперсия и выборочные моменты.
37. Теорема о свойствах выборочных моментов.
38. Определение точечной оценки.
39. Свойства оценок: несмещенность, состоятельность, оптимальность в среднем квадратическом, асимптотическая нормальность.
40. Неравенство Рао-Крамера.
41. Определение хи квадрат распределения, распределения Стьюдента и распределения Фишера-Снедекора.
42. Определение доверительного интервала. Точность и надежность интервальной оценки.
43. Гипотеза о согласии (однородности, независимости).
44. Основные понятия теории проверки статистических гипотез: статистическая гипотеза, простая и сложная гипотезы, основная (нулевая) гипотеза и альтернатива, критерий, критическая зона, статистика критерия, критическая константа, ошибки первого и второго рода, -уровень значимости и мощность критерия, равномерно наиболее мощный критерий, лемма Неймана-Пирсона, критерий отношения правдоподобия

Типовые задачи на модуль

Модуль 1.

1. Вероятность выпадения герба для некоторой монеты равна 0,45. Эту монету подбросили 10000 раз. Каким будет минимальное число выпавших гербов, которое можно гарантировать с вероятностью 0,95?
2. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет распределение с плотностью

$$\rho_\xi(x,y) = \begin{cases} 2, & x \in [0,\,1],\ 0 \le y \le 1-x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найти условные распределение и мат. ожидание случайной величины ξ_1 при условии $\xi_2 = 0.5$.

3. Случайная величина ξ имеет гамма распределение с параметрами $\alpha = 2,\ \beta = 1$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\eta = 2\xi + 5$. С помощью характеристической функции найти математическое ожидание случайной величины η.
4. Ресторан под открытым небом работает только в погожие дни. Если в данной местности сегодня идет дождь, то с вероятностью 0.4 он будет и завтра. Если сегодня дождя нет, то завтра он будет с вероятностью 0.1. Описать эту ситуацию с помощью однородной цепи Маркова, построить матрицу перехода за один шаг. Найти стационарной распределение цепи. Сегодня ресторан закрыт. Найти вероятность того, что он будет закрыт еще два дня.

Модуль 2.

1. Пусть $X = (X_1,..., X_n)$ - повторная выборка из распределения Пуассона с параметром λ. По методу наибольшего правдоподобия найти оценку параметра λ. Доказать, что полученная оценка является несмещенной и состоятельной. Используя неравенство Рао-Крамера, проверить оценку на эффективность.
2. На трех внешне одинаковых рынках A, B и C использовался некоторый механизм государственного регулирования и отмечалось улучшились (1), ухудшились (-1) или остались без изменения (0) результаты работы фирм определенного типа. Были получены следующие результаты:

Результат государственного регулирования	Тип рынка		
	A	B	C
-1	10	20	10
0	50	10	10
1	85	70	80

Можно ли считать на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, что исследуемые рынки являются однородными по реакции на внешнее воздействие?

Методические указания для выполнения курсовой работы

Задание на работу

1. Сгенерировать две повторные выборки объема $N \geq 100$ из нормального распределения.
2. Для каждой выборки найти выборочные среднее значение, дисперсию, медиану, экстремальные значения и размах выборки.
3. Для первой выборки построить график эмпирической функции распределения и гистограмму. Сгладить гистограмму с помощью плотности нормального распределения, предварительно оценив параметры.
4. Построить оценки параметров нормального распределения по МНП.
5. Построить доверительные интервалы для параметров нормального распределения:
    a. доверительный интервал для среднего при известной дисперсии (использовать значение σ^2);
    b. доверительный интервал для среднего при неизвестной дисперсии;
    c. доверительный интервал для неизвестной дисперсии.
6. По критерию χ^2 проверить согласие эмпирических данных с нормальным распределением.
7. Две выборки сгруппировать и проверить их однородность по критерию χ^2.
8. Для первой выборки проверить гипотезы о параметрах нормального распределения:
    a. проверить гипотезу $H_0 : a = a_0$ против альтернативы $H_1 : a \neq a_0$;
    b. проверить гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0$ против альтернативы $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0$.
9. Для двух независимых выборок из нормального распределения проверить гипотезу о равенстве средних значений (при равенстве дисперсий)

Пример:

N варианта	**Фамилия**					a_0 и σ_0^2
1	Иванов Иван Иванович			,99	,05	a_0=0, 5, σ_0^2=1

При генерации выборок из нормального распределения использовать параметры a и σ^2.

Для проверки гипотез использовать параметры a_0 и σ_0^2.

γ, α *– доверительный уровень и уровень значимости соответственно.*

Требования к выполнению и оформлению расчетных работ.

Работа может выполняться вручную или с использованием любого известного студенту пакета прикладных программ по статистике.

Отчет по работе должен содержать все требуемые для расчетов исходные данные, подробное описание всех этапов вычислений со ссылками на необходимые формулы.

Оценка за работу.

По результатам выполнения курсовой работы проводится собеседование со студентами, в ходе которого проверяется степень владения теоретическим материалом, необходимым для выполнения работы и степень владения основными методами, применяемыми при решении задач математической статистики. Итоговая оценка выставляется с учетом результатов собеседования.

VII. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 310 (170002, Тверская область, г.Тверь, пер. Садовый, д.35)	Столы, стулья, доска меловая
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 205 (170002, Тверская область, г.Тверь, пер. Садовый, д.35)	Набор учебной мебели, экран, проектор.
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 318 (170002, Тверская область, г.Тверь, пер.	Набор учебной мебели, экран, проектор.

Садовый, д.35)	
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 3л (170002, Тверская область, г.Тверь, пер. Садовый, д.35)	Набор учебной мебели, экран, компьютер, проектор, МФУ.

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

п.п.	**Обновленный раздел рабочей программы дисциплины**	**Описание внесенных изменений**	**Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения**
1.	I. 3. Объем дисциплины	Выделение часов на практическую подготовку	От 29.10.2020 года, протокол № 3 ученого совета факультета
2.	II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий	Выделение часов на практическую подготовку по темам	От 29.10.2020 года, протокол № 3 ученого совета факультета
3.	11. 2) Программное обеспечение	Внесены изменения в программное обеспечение	От 29.09.2022 года, протокол № 2 ученого совета факультета
4.	13. Материально-техническое обеспечение	Внесены изменения в материально-техническое обеспечение аудиторий	От 29.09.2022 года, протокол № 2 ученого совета факультета
5.	11. 2) Программное обеспечение	Внесены изменения в список	От 24.08.2023 года,

		ПО	протокол № 1 ученого совета факультета
6.	V. 1) Рекомендуемая литература	Обновление ссылок на литературу	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета