

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 25.07.2025 09:55:00
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

«Утверждаю»

Руководитель ООП



Шаров Г.С.

05 2025 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Избранные вопросы интегрального исчисления

Направление подготовки

01.03.01 Математика

Профиль подготовки

Математическое обеспечение экономической деятельности

Для студентов 4 курса

Форма обучения очная

Тверь, 2025

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование готовности использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа в будущей профессиональной деятельности.

Задачами дисциплины являются фундаментальная подготовка в области математического анализа функционального анализа и теории функций комплексного переменного; совершенствование умения применять математические методы в прикладных задачах; овладение математическим языком, на котором написаны многие разделы математики и физики.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к формируемой участниками образовательных отношений части блока 1 – к дисциплинам, углубляющим универсальные компетенции и формирующим профессиональные компетенции.

Является дисциплиной, имеющей логические и содержательно–методологические взаимосвязи со следующими дисциплинами: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ. Курс полезен при изучении этих дисциплин, поскольку позволяет получить более целостное представление о таком важном понятии математики как производная. Для её успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения дисциплинам: школьной математики, математического анализа и др.

Дисциплина изучается на 4 курсе (8 семестр).

3. Объём дисциплины: 3 зачётные единицы, 108 академических часов, в том числе:

контактная аудиторная работа: 60 часов,

в том числе: лекции 30 часов, в том числе практическая подготовка 0 часов; практические занятия 30 часов, в том числе практическая подготовка 6 часов;

самостоятельная работа: 48 часов.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы	Планируемые результаты обучения по дисциплине
---	---

(формируемые компетенции)	
ПК-1 Способен осуществлять научно-исследовательскую работу на основе математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	ПК-1.1 Актуализирует базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационно-коммуникационных технологий для решения задач профессиональной деятельности ПК-1.2 Проводит анализ, обоснование и выбор решения прикладных задач

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения

зачёт (8 семестр).

6. Язык преподавания: русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Самостоя- тельная работа (в т.ч. контроль)	
		Лекции		Практичес- кие занятия		Контроль самостоя- тельной работы (в том числе курсовая работа	
		всего	в т.ч. практическая подготовка	всего	в т.ч. практическая подготовка		
1. Интегрирование одномерных функций. Понятие первообразной. Существование первообразной. Формула Ньютона- Лейбница	7	2	0	2	0	0	3
Неопределенный интеграл. Основные свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле.	7	2	0	2	0	0	3
Техника неопределенного интегрирования.	7	2	0	2	2	0	3

Интегрирование рациональных функций. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций.							
Теоремы о среднем значении для интеграла Римана	6	2	0	2	0	0	2
Несобственные интегралы по бесконечному промежутку и от неограниченной функции. Основные свойства. Вычисление. Абсолютная сходимость. Признаки сходимости несобственных интегралов. Признаки сравнения. Признаки Абеля и Дирихле. Интегралы с несколькими особенностями.	11	4	0	4	0	0	3
Геометрические и физические приложения интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Спрямолинейные кривые. Длина кривой.	10	4	0	4	2	0	2
2. Кратные интегралы. Двойные интегралы. Линейность, монотонность и конечная аддитивность двойного интеграла. Вычисление двойных	16	6	0	6	0	0	4

интегралов сведением к повторным. Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам. Тройные интегралы и интегралы высшей кратности. Приложения кратных интегралов.							
3. Криволинейные интегралы. Естественная параметризация кривой. Ориентация кривой. Понятие криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление сведением к определенному интегралу. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода и определенным интегралом.	12	4	0	4	0	0	4
Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Приложения криволинейных интегралов.	18	2	0	2	0	0	14
4. Интегралы от функций комплексного переменного.	14	2	0	2	2	0	10

Криволинейные интегралы в ТФКП. Определение, свойства, примеры, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода из курса действительного анализа. Переход к пределу под знаком интеграла.							
Всего	108	30	0	30	6	0	48

III. Образовательные технологии

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании аудиторных занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Также на занятиях практикуется самостоятельная работа студентов, выполнение заданий в малых группах, письменные работы, моделирование дискуссионных ситуаций, работа с раздаточным материалом, привлекаются ресурсы сети INTERNET. Курс предусматривает выполнение контрольных и самостоятельных работ, письменных домашних заданий. В качестве форм контроля используются различные варианты взаимопроверки и взаимоконтроля.

Интерактивное взаимодействие студентов с одной стороны и преподавателя с другой, а также студентов между собой и с преподавателем во время практических занятий.

Образовательные технологии

1. Дискуссионные технологии
2. Информационные (цифровые)
3. Технологии развития критического мышления

Современные методы обучения

1. Активное слушание
2. Лекция (традиционная)

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

- 1
- 2
- 3
- 4

Задания на практических занятиях

Неопределенный интеграл. Определенный интеграл

1. Найдите интегралы.

1.1. $\int (x-1)(2x+3)^{12} dx$

1.2. $\int \frac{(x^2 - 2x + 2) \ln(x+1) + 2x}{x^2 - 2x + 2} dx$

1.3. $\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 4x}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)} dx$

1.4. $\int x \sin 3x dx$

1.5. $\int \frac{\sqrt{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx$

1.6. $\int \frac{e^{2x+1}}{\sqrt{1+e^x}} dx$

1.7. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$

1.7. $\int_{-3}^1 x \sqrt{\frac{3+x}{2}} dx$

1.8. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sin x + \cos^2 x} dx$

1.9. $\int_0^1 \left(x^3 + e^{\frac{x}{10}} - \sin \frac{\pi}{6} x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) dx$

1.10. $\int_0^{0,5} (2x-1) e^{4x^2-4x+1} dx$

1.11. $\int_1^e \ln 2x \cdot dx$

1.12. $\int_{-1}^0 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

Несобственный интеграл. Приложения интеграла

1. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y = \sin 2x$ и $y = \frac{4}{\pi} x$
2. Найдите длину кривой $x = 2t^2, y = \frac{4}{3}t^3, t \in [0; 2]$
3. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл.

3.1. $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+1}{x^2} dx$

3.2. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\sqrt{x}} dx$

3.3. $\int_0^1 \frac{\sqrt[6]{x^3+x^4}}{x} dx$

Двойные и тройные интегралы, их приложения

1. Найдите двойной интеграл по области G , ограниченной указанными линиями

1.1. $\iint_G \cos(x-y) dx dy, x=y, x=0, y=\pi$

1.2. $\iint_G xy dx dy, x=y, x=1, y=0$

$$\iint_G e^{2x-y} dx dy, \quad 2x = y, \quad 2x = y + 1, \quad y = 0, \quad y = 1$$

1.3. G

$$\iint_G \frac{2y}{x} dx dy, \quad x^2 = y, \quad 2x = y, \quad x = 1, \quad x = 2$$

1.4. G

2. Найдите тройной интеграл по области G , ограниченной указанными поверхностями

$$\iiint_G x dx dy dz, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad x + y + z = 2$$

2.1. G

$$\iiint_G \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+y^2} dx dy dz, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = x^2 + y^2$$

2.2. G

$$\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = 1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad (x \geq 0)$$

2.3. G

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$3.1. \quad 4y = x^2, \quad 4x = x^2 y, \quad x = 3$$

$$3.2. \quad x = 2y, \quad y = 3x, \quad 3x = 2y, \quad x = 4 - 2y$$

4. Найдите объем тела ограниченного поверхностями

$$4.1. \quad x^2 = y^2 = 2x, \quad z = x^2 = y^2, \quad z = 0$$

Криволинейные интегралы

1. Найдите криволинейные интегралы

$$\int_C (2x + y) ds, \quad l = ABOA, \quad A = (1, 0), \quad B = (0, 2), \quad O = (0, 0)$$

1.1. l

$$\int_C \sqrt{y} ds, \quad l: x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

1.2. l

$$\int_C y dx - x dy, \quad l: y = x^3, \quad 0 \leq x \leq 2$$

1.3. l

$$\int_C (x - y) dx - (x + y) dy,$$

1.4. l

$\tilde{l}$ произвольный путь, соединяющий точки $A = (2, -1), B = (1, 0)$

2. Используя формулу Грина, найдите интеграл

$$\oint_G e^x (1 - \cos y) dx - e^x (y - \sin y) dy, \quad G = \{(x, y) : x \in [0, \pi], \quad 0 \leq y \leq \sin x\}$$

$\oint_G$

2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Типовые контрольные задания	Критерии оценивания и шкала оценивания
ПК-1 Способен осуществлять научно-исследовательскую работу на основе математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий <i>ПК-1.1 Актуализирует базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационно-коммуникационных технологий для решения задач профессиональной деятельности</i> <i>ПК-1.2 Проводит анализ, обоснование и выбор решения прикладных задач</i>	1. Решить 10 трудных задач, используя сборник для подготовки и проведения письменного экзамена по математике. 2. Изложите методику преподавания некоторых из понятий, используемых при решении этих задач. 3. Найдите точки условного экстремума функции f, при заданных ограничениях.	• <i>Формулировки корректны, детализированы в подпунктах, их количество позволяет раскрыть содержание темы по существу – 15–20 баллов</i> • <i>Формулировки корректны, часть из них детализированы в подпунктах, их количество позволяет раскрыть содержание темы по существу</i> ИЛИ <i>Отдельные неточности в формулировках не искажают тему по существу – 8–14 баллов</i> • <i>Разработка по существу является простой, формулировки отражают суть темы</i> ИЛИ <i>Наряду с корректными имеются ошибочные формулировки, искажающие отдельные аспекты темы – 1–7 баллов</i> <i>Разработка не соответствует указанным выше требованиям</i> ИЛИ <i>представляет набор абстрактных ормулировок не отражающих специфики содержания темы – 0 баллов</i> • Верно решает, анализирует рациональность выбранного метода, контролирует правильность полученных результатов, соотносит

	$f(x, y, z) = xy^2, \quad x + y = z$ 4. Приведите примеры точек локального максимума и точек локального минимума функции. Покажите геометрическую интерпретацию. 5. Является ли функция $w = ze^{2iz}$ голоморфной в начале координат? Дока - з а т ь голоморфность функций $\sin z$ и $\operatorname{ch} z$ на $\mathbb{C}$. 6. Укажите связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Приведите необходимые примеры, доказательство	полученные результаты с общими принципами, самостоятельно получает недостающие знания из источников информации – 85-100%. • Выбирает метод решения задачи, решает задачу без ошибок, анализирует полученные результаты, ориентируется в источниках информации – 65-84% • Решает типовую задачу без ошибок, применяя предложенный метод, знает источник информации – 45-64% • Решает типовую задачу с ошибками – 20-44% Не владеет – 0-19%
--	--	---

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) Основная литература:

1. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа. Часть 1 / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 444 с. — ISBN 978-5-507-45877-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/289001>
2. Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной : учебное пособие / И. М. Петрушко, А. Г. Елисеев, В. И. Качалов, С. Ф. Кудин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 368 с. — ISBN 978-5-8114-1064-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210425>

б) Дополнительная литература:

1. Марон, И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной : учебное пособие / И. А. Марон. — 3-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-0849-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210134>
2. Дрожжин И. А. Аппроксимация непрерывных функций с ограничениями / И. А. Дрожжин; [науч. ред. к.ф.-м.н., проф. Н. Б. Тихомиров]; М-во образования

и науки РФ, ФГБОУ ВПО "Твер. гос. ун-т". - Тверь: Тверской государственный университет, 2014. - 86 с. - Библиогр. в конце книги (12 назв.). - Электронный ресурс. –Режим доступа:

<http://texts.lib.tversu.ru/texts/09651nauch.pdf>

Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-1274-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210809>

2) Программное обеспечение

Google Chrome	бесплатное ПО
Яндекс Браузер	бесплатное ПО
Kaspersky Endpoint Security 10	акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE	бесплатное ПО
ОС Linux Ubuntu	бесплатное ПО

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

№ п/п	Вид информационного ресурса, наименование информационного ресурса	Адрес (URL)
1	ЭБС «ZNANIUM.COM»	https://znanium.com/
2	ЭБС «ЮРАИТ»	https://urait.ru/
3	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»	https://biblioclub.ru/
4	ЭБС IPR SMART	http://www.iprbookshop.ru/
5	ЭБС «ЛАНЬ»	http://e.lanbook.com
6	ЭБС ТвГУ	http://megapro.tversu.ru/megapro/Web
7	Репозиторий ТвГУ	http://eprints.tversu.ru
8	Ресурсы издательства Springer Nature	http://link.springer.com/
9	СПС КонсультантПлюс (в сети ТвГУ)	

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Вопросы к зачёту

1. Понятие первообразной. Существование первообразной. Формула Ньютона-Лейбница

2. Неопределенный интеграл. Основные свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле.

3. Техника неопределенного интегрирования. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций.

4. Теоремы о среднем значении для интеграла Римана

5. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку и от неограниченной функции. Основные свойства. Вычисление. Абсолютная сходимость. Признаки сходимости несобственных интегралов. Признаки сравнения. Признаки Абеля и Дирихле.

6. Интегралы с несколькими особенностями.

7. Геометрические и физические приложения интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Спрямоугольные кривые. Длина кривой.

8. Двойные интегралы. Линейность, монотонность и конечная аддитивность двойного интеграла. Вычисление двойных интегралов сведением к повторным. Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам. Тройные интегралы и интегралы высшей кратности. Приложения кратных интегралов.

9. Криволинейные интегралы. Понятие криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление сведением к определенному интегралу.

10. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода и определенным интегралом.

11. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

12. Приложения криволинейных интегралов.

13. Криволинейные интегралы в ТФКП. Определение, свойства, примеры, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода из курса действительного анализа. Переход к пределу под знаком интеграла.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

Во-первых, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

Во-вторых, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине (модулю) перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения

самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

1. Работа с учебными пособиями. Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

2. Самостоятельное изучение тем. Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту и экзамену.

3. Подготовка к практическим занятиям. При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

4. Составление конспектов. В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

5. Подготовка к зачёту. При подготовке к зачету студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе занятий.

Качество усвоения студентом каждой дисциплины оценивается по 100-балльной шкале.

Интегральная рейтинговая оценка (балл) по каждому (периоду обучения) складывается из оценки текущей работы студентов на семинарских и практических занятиях, выполнения индивидуальных творческих заданий и др. и оценки за выполнение студентом учебного задания при рейтинговом контроле успеваемости. При этом доля баллов, выделенных на рейтинговый

контроль не должна превышать 50% общей суммы баллов данного модуля (периода обучения).

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся зачетом, по итогам семестра составляет 100 баллов (50 баллов – 1-й модуль и 50 баллов – 2-й модуль).

Студенту, набравший 40 баллов и выше по итогам работы в семестре, в экзаменационной ведомости и зачетной книжке выставляется оценка «зачтено». Студенту, набравшему до 39 баллов включительно, сдает зачет,

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.
- Сроки проведения рейтингового контроля:

осенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

весенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

VII. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, учебная аудитория: № 312	Комплект учебной мебели, интерактивная система.	Google Chrome – бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus – бесплатно OpenOffice – бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО – бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО – бесплатно

<i>(170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)</i> Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, учебная аудитория: № 308а <i>(170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)</i>	<i>Комплект учебной мебели, CD-магнитола, компьютер: (системный блок + монитор), многофункциональный лазер. копир/принтер/сканер, видеоплеер, телевизор, DVD плеер.</i>	Google Chrome – бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus – бесплатно OpenOffice – бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО – бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО – бесплатно
--	--	--

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и № протокола заседания кафедры / методического совета факультета, утвердившего изменения
1			
2			