

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 11.06.2025 13:39:35
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ООП
С.М. Дудаков
«31» октября 2024 г.



Рабочая программа дисциплины
Дополнительные главы дискретной математики

Направление подготовки
01.04.02 — ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Направленность (профиль)
СИСТЕМНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

для студентов 1 курса
ФОРМА ОБУЧЕНИЯ — очная

Составитель(и):

- к.ф.-м.н. Карлов Б.Н.

Тверь — 2024

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины:

Ознакомить обучающихся с логикой высказываний и логикой предикатов, с некоторыми методами логического вывода, с понятиями разрешимости и неразрешимости, со сложностью вычислений, с труднорешаемыми проблемами.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина входит в раздел «Математический» обязательной части блока 1.

Предварительные знания и навыки. Знание курсов «Дискретная математика», «Математическая логика и теория алгоритмов».

Дальнейшее использование. Полученные знания используются в последующем при изучении предметов: «Методы искусственного интеллекта», «Теория логических языков», «Неклассические логики», «Рекурсивные функции», «Сложность алгоритмов и случайность» и других.

3. Объем дисциплины: 5 зач. ед., 180 акад. ч., в том числе:

контактная аудиторная работа лекций 60 ч.,

контактная внеаудиторная работа контроль самостоятельной работы 0 ч., в том числе курсовая (расчетно-графическая) работа 0 ч.;

самостоятельная работа 120 ч., в том числе контроль 36 ч.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы:

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ПК-1, Способен проводить научные исследования с целью получения новых результатов	ПК-1.1, Работает с научной документацией ПК-1.2, Решает научные задачи фундаментального и прикладного характера
ПК-2, Способен использовать математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения научных проблем и задач	ПК-2.1, Анализирует математические методы на предмет их применимости к решаемой задаче

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения:

экзамен

6. Язык преподавания:

русский

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа — наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Контроль сам. раб., в т.ч. курсовая работа	Сам. раб., в т.ч. контроль (час.)
		Лекции		Практ. занятия / Лаб. работы			
		Всего	В т.ч. практ. подг.	Всего	В т.ч. практ. подг.		
1	2	3	4	5	6	7	8
Логика высказываний.	60	10		0/0		0	50
Логика предикатов	60	25		0/0		0	35
Сложность вычислений	60	25		0/0		0	35
Итого	180	60	0	0/0	0/0	0	120

Учебная программа дисциплины

1. Логика высказываний.

- Булевы функции
- Булевы формулы. Задание булевых функций формулами.
- Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности.
- Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.
- Метод резолюций для логики высказываний.
- Теорема компактности для логики высказываний.

2. Логика предикатов

- Термы и формулы логики предикатов.
- Алгебраические системы. Значение формулы на алгебраической системе.
- Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности.
- Предварённые формы.
- Скулемовские функции.
- Эрбрановский универсум.
- Метод резолюций для логики предикатов.
- Теорема компактности для логики предикатов.

- Примеры свойств, не выразимых в логике предикатов.

3. Сложность вычислений

- Детерминированные и недетерминированные машины Тьюринга.
- Построение односторонней машины Тьюринга со стандартной заключительной конфигурацией.
- Многоленточные машины Тьюринга. Машины Тьюринга со входом и выходом.
- Неразрешимость проблемы остановки.
- Неразрешимость логики предикатов.
- Временные и ёмкостные сигнализирующие.
- Лемма о линейном ускорении. O -символика.
- Полиномиальная эквивалентность различных типов машин Тьюринга.
- Классы сложности. Основные соотношения между классами.
- Полиномиальная сводимость и полные проблемы.
- Теорема Кука-Левина.
- Примеры NP-полных задач в логике, теории графов, комбинаторике.

III. Образовательные технологии

Учебная программа — наименование разделов и тем	Вид занятия	Образовательные технологии
Логика высказываний.	лекции	изложение теоретического материала
Логика предикатов	лекции	изложение теоретического материала
Сложность вычислений	лекции	изложение теоретического материала

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора ПК-1.1

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Уметь реализовывать алгоритмы	Примеры задач для контрольных работ:	оценка 3 — умеет строить машины

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
с использованием машин Тьюринга, доказывать неразрешимость алгоритмических проблем	<ul style="list-style-type: none"> Постройте машину Тьюринга для следующей задачи. На вход подаётся слово w в алфавите $\{a, b\}$. Если w имеет вид xx для некоторого слова x, то нужно выдать 1, иначе выдать 0. Например, если $w = abbabb$, то результатом будет 1. Разбейте программу на логические части и прокомментируйте каждую из них. Докажите, что множество A неразрешимо. $A = \{x \mid \varphi_x(x^2) > 40\}$ 	Тьюринга для простейших алгоритмов, оценка 4 — умеет строить машины Тьюринга для более сложных алгоритмов, оценка 5 — кроме того умеет доказывать неразрешимость алгоритмических проблем
Уметь оценивать сложность алгоритмов, доказывать NP-полноту алгоритмических проблем	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <ul style="list-style-type: none"> Докажите, что проблема ЯДРО лежит в классе NP. Вход: ориентированный граф G. Вопрос: есть ли в G ядро? (Ядром графа $G = (V, E)$ называется множество вершин $V' \subseteq V$, такое что никакие две вершины из V' не связаны ребром и для любой вершины $v \in V \setminus V'$ существует вершина $u \in V'$, такая что $(u, v) \in E$.) Докажите NP-полноту проблемы ОСТОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ЛИСТЬЕВ. Вход: неориентированный граф $G = (V, E)$ и целое положительное число k. Вопрос: существует ли в G остовное дерево T с k листьями? <i>Указание.</i> ГАМИЛЬТОНОВ ПУТЬ \leq_p ОСТОВ 	оценка 3 — умеет строить недетерминированные алгоритмы и оценивать их сложность, оценка 4 — кроме того умеет доказывать NP-полноту алгоритмических проблем в простейших случаях, оценка 5 — кроме того умеет доказывать NP-полноту алгоритмических проблем в более сложных случаях

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора ПК-1.2

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Уметь выполнять эквивалентные преобразования булевых формул, использовать метод резолюций	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <ul style="list-style-type: none"> Используя основные эквивалентности, постройте совершенную КНФ для формулы $\varphi = (x \rightarrow \neg(y + z)) \vee \neg(x \rightarrow \neg y).$ Даны формулы $\varphi_1 = (x \vee y) \rightarrow (x \rightarrow \neg z)$, $\varphi_2 = \neg z \rightarrow (y \vee t)$, $\varphi_3 = t \rightarrow z$, $\varphi_4 = (x \wedge y) \rightarrow z$, $\psi = \neg x$. Используя метод резолюций, докажите, что формула ψ является следствием формул $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. 	оценка 3 — умеет пользоваться эквивалентностями, строить ДНФ и КНФ, оценка 4 — кроме того умеет пользоваться методом резолюций в простейших случаях, оценка 5 — кроме того умеет пользоваться методом резолюций в более сложных случаях
Знать синтаксис и семантику логики предикатов, метод резолюций для логики предикатов	<p>Примеры вопросов к экзамену:</p> <ul style="list-style-type: none"> Термы и формулы логики предикатов. Алгебраические системы. Значение формулы на состоянии алгебраической системы. Основные эквивалентности логики предикатов. Предваренные формы. 	оценка 3 — знает понятия формулы логики предикатов, значения формулы, предваренной формы, оценка 4 — кроме того знает основные эквивалентности и

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
	<ul style="list-style-type: none"> • Скулемовские функции. Эрбрановский универсум. Теорема о модели на эрбрановском универсуме. • Метод резолюций для логики предикатов. Полнота и непротиворечивость. • Теорема компактности для логики предикатов. Примеры свойств, не выражимых в логике предикатов. Нестандартные модели арифметики. 	метод резолюций, оценка 5 — кроме того знает доказательство перечисленных утверждений

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора ПК-2.1

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Уметь описывать свойства предметных областей с помощью формул логики предикатов, строить модели формул, применять метод резолюций для логики предикатов, доказывать невыразимость различных свойств в логике предикатов	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Сигнатура Σ содержит четыре предикатных символа $C^{(3)}$, $K^{(2)}$, $D^{(2)}$ и $<^{(2)}$. Они интерпретируются следующим образом: $C(x, y, z)$: сотрудник с номером x имеет фамилию y и получает зарплату z; $K(x, y)$: сотрудник с номером x находится в комнате y; $D(x, y)$: сотрудник с номером x дружит с сотрудником с номером y; $x < y$: число x меньше числа y. <p>Постройте формулу сигнатуры Σ, выражающую следующее утверждение: у сотрудника с максимальной зарплатой есть друзья во всех комнатах.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Какое свойство графов задаёт формула $(\forall x) \left((\exists y) (E(y, x) \wedge (\forall z) (\neg z = y \rightarrow \neg E(z, x))) \rightarrow \right. \\ \rightarrow (\exists u) (\exists v) (\neg u = v \wedge E(x, u) \wedge E(x, v) \wedge \\ \left. \wedge (\forall t) ((\neg t = u \wedge \neg t = v) \rightarrow \neg E(x, t))) \right)?$ <p>Постройте для этой формулы модель и контрмодель, содержащие не менее пяти вершин.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Используя метод резолюций, докажите, что формула ψ является следствием формул φ_1 и φ_2. $\varphi_1 = (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)Q(x, y))$ $\varphi_2 = (\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge Q(x, y)) \rightarrow P(y))$ $\psi = (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$ • Докажите, что не существует формулы $\varphi(x, y)$ сигнатуры $\Sigma = \langle E^{(2)}; \rangle$, которая была бы истинна на тех и только тех графах, в которых вершины x и y достижимы из одной вершины. 	оценка 3 — умеет описывать различные свойства предметных областей с помощью формул логики предикатов, строить по формуле модель, оценка 4 — кроме того умеет использовать метод резолюций, оценка 5 — кроме того умеет применять теорему компактности для доказательства невыразимости некоторых свойств в логике предикатов
Знать понятия временной и емкостной сложности, классов сложности, NP-полных проблем	<p>Примеры вопросов к экзамену:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Временные и ёмкостные сигнализирующие. • Лемма о линейном ускорении. O-символика. • Полиномиальная эквивалентность различных типов машин Тьюринга. 	оценка 3 — знает понятия временной и емкостной сложности алгоритма, основные классы сложности, оценка 4 — кроме того знает понятие

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
	<ul style="list-style-type: none"> • Классы сложности. Основные соотношения между классами. • Полиномиальная сводимость и полные проблемы. • Теорема Кука-Левина. • Примеры NP-полных задач в логике, теории графов, комбинаторике: 3-КНФ, КЛИКА, ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ, ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ, РАСКРАСКА, 3-СОЧЕТАНИЕ, РАЗБИЕНИЕ. 	NP-полной проблемы, основные примеры NP-полных проблем, оценка 5 — кроме того знает доказательства перечисленных утверждений
Знать синтаксис и семантику логики высказываний, метод резолюций для логики высказываний	<p>Примеры вопросов к экзамену:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Булевы функции. Задание булевых функций таблицами. Лексикографический порядок. • Формулы логики высказываний. Синтаксис и семантика. Основные булевы связи: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание, сложение по модулю 2. • Основные эквивалентности логики высказываний. • Элементарные конъюнкции и дизъюнкции. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Совершенные ДНФ. Построение КНФ и ДНФ по булевой функции. • Метод резолюций для логики высказываний. Полнота и непротиворечивость. • Теорема компактности для логики высказываний. 	оценка 3 — знает понятие булевой функции, булевой формулы, ДНФ и КНФ, оценка 4 — кроме того знает основные эквивалентности и метод резолюций, оценка 5 — кроме того знает доказательства теоремы о полноте и непротиворечивости и теоремы компактности
Знать некоторые математические модели алгоритмов (машины Тьюринга), иметь понятие об алгоритмической разрешимости и неразрешимости проблем	<p>Примеры вопросов к экзамену:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Детерминированные и недетерминированные машины Тьюринга. Конфигурации. • Стандартная заключительная конфигурация. Односторонние машины Тьюринга. Многоэтажная лента. • Многоленточные машины Тьюринга. Машины Тьюринга с входом и выходом. • Неразрешимость проблемы остановки. • Неразрешимость логики предикатов. 	оценка 3 — знает различные виды машин Тьюринга и их семантику, оценка 4 — кроме того знает основные возможности преобразования машин Тьюринга, оценка 5 — кроме того знает примеры неразрешимых проблем и доказательства перечисленных утверждений

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1. Рекомендованная литература

- [1] Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для вузов / С. Б. Гашков, А. Б. Фролов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 530 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-17718-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/536528> (дата обращения: 13.12.2024).
- [2] Гисин, В. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для вузов / В. Б. Гисин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство

Юрайт, 2024. — 468 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-16763-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/535959> (дата обращения: 13.12.2024).

[3] Журавлев, Ю. И. Дискретный анализ. Формальные системы и алгоритмы : учебное пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, М. Н. Вялый. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 318 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06279-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/537918> (дата обращения: 13.12.2024).

б) Дополнительная литература

[4] Кудрявцев, В. Б. Дискретная математика. Теория однородных структур : учебник для вузов / В. Б. Кудрявцев, А. С. Подколзин, А. А. Болотов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 295 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02901-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/537943> (дата обращения: 13.12.2024).

[5] Скорубский, В. И. Математическая логика : учебник и практикум для вузов / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 211 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01114-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/536998> (дата обращения: 13.12.2024).

[6] Судоплатов, С. В. Математическая логика и теория алгоритмов : учебник и практикум для вузов / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 5-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 207 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12274-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/535807> (дата обращения: 13.12.2024).

2. Программное обеспечение

Наименование помещений	Программное обеспечение
Ауд. 201а (компьютерная лаборатория ПМиК) (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Перечень программного обеспечения (со свободными лицензиями): Linux Kubuntu, KDE, TeXLive, TeXStudio, LibreOffice, GIMP, Gwenview, ImageMagick, Okular, Skanlite, Google Chrome, KDE Connect, Konversation, KRDC, KTorrent, Thunderbird, Elisa, VLC media player, PulseAudio, KAppTemplate, KDevelop, pgAdmin4, PostgreSQL, Qt, QtCreator, R, RStudio, Visual Studio Code, Perl, Python, Ruby, clang, clang++, gcc, g++, nasm, flex, bison, Maxima, Octave, Dolphin, HTop, Konsole, KSystemLog, Xterm, Ark, Kate, KCalc, Krusader, Spectacle, Vim.

3. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

№ п/п	Вид информационного ресурса	Наименование информационного ресурса	Адрес (URL)
1.	Электронно-библиотечная система	«Университетская библиотека онлайн»	https://biblioclub.ru
2.	Электронно-библиотечная система	IPR SMART	https://www.iprbookshop.ru/
3.	Электронно-библиотечная система	«ЮРАЙТ»	https://urait.ru/
4.	Электронно-библиотечная система	«Лань»	http://e.lanbook.com
5.	Электронно-библиотечная система	«Знаниум»	https://znanium.com/
6.	Электронно-библиотечная система	ЭБС ТвГУ	http://megapro.tversu.ru/megapro/
7.	Научная электронная библиотека	eLIBRARY.RU (подписка на журналы)	https://elibrary.ru/projects/subs
8.	Репозиторий	Репозиторий ТвГУ	http://eprints.tversu.ru

4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

[1] Discrete Mathematics Tutorial, https://www.tutorialspoint.com/discrete_mathemat

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Примеры задач для подготовки к контрольным работам

1. Используя метод резолюций, докажите, что формула $\psi \equiv z$ является следствием формул $\varphi_1 \equiv x \rightarrow (\neg y \vee \neg z)$, $\varphi_2 \equiv \neg z \rightarrow (x + y)$ и $\varphi_3 \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

2. Предметной областью алгебраической системы является множество всех точек и прямых евклидовой плоскости. Сигнатура Σ содержит предикатные символы $T^{(1)}$, $P^{(1)}$ и $L^{(2)}$. Они интерпретируются следующим образом:

$T(x)$: x — точка;

$P(x)$: x — прямая;

$L(x, y)$: x лежит на y .

Постройте формулу логики предикатов, выражающую следующее утверждение: через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной.

3. Какое свойство графов задаёт формула

$$(\forall x)(\exists y) \left(A(y) \wedge \left((\exists z)(E(y, z) \wedge E(z, x)) \vee E(y, x) \vee x = y \right) \right)?$$

Постройте для этой формулы модель и контрмодель, содержащие не менее пяти вершин.

4. Используя метод резолюций, докажите, что формула $\psi = (\forall x)Q(x)$ является следствием формул $\varphi_1 = (\forall x)(\exists y)(R(y, x) \wedge Q(y))$, $\varphi_2 = (\forall z)(\forall x)(\forall y)((R(x, z) \wedge R(z, y) \wedge Q(x)) \rightarrow Q(y))$ и $\varphi_3 = (\forall x)R(x, x)$.
5. Докажите, что не существует формулы φ сигнатуры $\Sigma = \langle E^{(2)}; \rangle$, которая была бы истинна на тех и только тех графах, в которых есть циклы.
6. Постройте машину Тьюринга, которая по слову в алфавите $\{a, b, c\}$ находит самый длинный префикс-палиндром. Оцените ее временную и емкостную сложность.
7. Постройте детерминированную многоленточную машину Тьюринга, которая проверяет, является ли входное слово палиндромом, в памяти $O(\log_2 n)$. Оцените время ее работы.
8. Докажите NP-полноту задачи «Гамильтонов путь между вершинами».

Вход: неориентированный граф $G = (V, E)$, вершины x и y .

Вопрос: существует ли в G простой путь из x в y , проходящий ровно один раз через каждую вершину?

Выставление оценок

Контрольная работа 1. Темы: логика высказываний, логика предикатов. Пример задания:

1. Даны формулы $\varphi_1 = (x \vee y) \rightarrow (x \rightarrow \neg z)$, $\varphi_2 = \neg z \rightarrow (y \vee t)$, $\varphi_3 = t \rightarrow z$, $\varphi_4 = (x \wedge y) \rightarrow z$, $\psi = \neg x$. Используя метод резолюций, докажите, что формула ψ является следствием формул $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.
2. Сигнатура Σ содержит четыре предикатных символа $C^{(3)}$, $K^{(2)}$, $D^{(2)}$ и $<^{(2)}$. Они интерпретируются следующим образом:

$C(x, y, z)$: сотрудник с номером x имеет фамилию y и получает зарплату z ;

$K(x, y)$: сотрудник с номером x находится в комнате y ;

$D(x, y)$: сотрудник с номером x дружит с сотрудником с номером y ;

$x < y$: число x меньше числа y .

Постройте формулу сигнатуры Σ , выражающую следующее утверждение: все сотрудники с максимальной зарплатой — однофамильцы и друзья.
3. Какое свойство графов задаёт формула

$$(\forall x)(\forall y) \left(\neg x = y \rightarrow \left((E(x, y) \vee (\exists z)(E(x, z) \wedge E(z, y))) \rightarrow \right. \right. \\ \left. \left. \rightarrow (E(y, x) \vee (\exists z)(E(y, z) \wedge E(z, x))) \right) \right)?$$

Постройте для этой формулы модель и контрмодель, содержащие не менее пяти вершин.

Контрольная работа 2. Темы: теорема компактности, сложность вычислений.

Пример задания:

1. Докажите, что не существует формулы $\varphi(x)$ сигнатуры $\Sigma = \langle E^{(2)}; \rangle$, которая была бы истинна на тех и только тех графах, в которых из вершины x достижима любая вершина.
2. Докажите NP-полноту проблемы «Остов с ограниченным числом листьев». Вход: неориентированный граф $G = (V, E)$ и целое положительное число k . Вопрос: существует ли в G остовное дерево T с k листьями?
Указание. ГАМИЛЬТОНОВ ПУТЬ \leq_p ОСТОВ

VII. Материально-техническое обеспечение

Для аудиторной работы

Наименование помещений	Материально-техническое оснащение помещений
Ауд. 308 (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Набор учебной мебели, экран проектор.

Для самостоятельной работы

Наименование помещений	Материально-техническое оснащение помещений
Ауд. 201а (компьютерная лаборатория ПМиК) (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Набор учебной мебели, доска маркерная, компьютер, сервер (системный блок), концентратор сетевой.

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п/п	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесённых изменений	Дата и протокол за- седания кафедры, утвердившего измене- ния