Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО «ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Утверждаю:

Руководитель ООП:

_________ Шаров Г.С.

«28» 05 2024 г.

Тверской государственный университет
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Математический анализ

Направление подготовки

02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Профиль подготовки

«Математические основы информатики»

Для студентов 1, 2 курсов очной формы обучения

Составители: О.Е. Баранова

С.Ю. Граф

Тверь, 2024

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Дисциплина «Математический анализ» имеет целью развитие алгоритмического и логического мышления студентов, информационной и библиографической культуры, овладение методами исследования и решения математических задач, в том числе с использованием программного обеспечения, выработка умения самостоятельно расширять свои математические знания и проводить математический анализ задач в различных предметных областях.

Задачами дисциплины «Математический анализ» являются изучение основных математических понятий, их взаимосвязи, методов решения математических и прикладных задач, формирование навыков выбора, реализации программного обеспечения для решения задач в различных предметных областях.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Математический анализ» относится к числу дисциплин базовой обязательной части.

Дисциплина изучается на 1 и 2 курсах (с 1 по 4 семестры).

3. Объем дисциплины: 19 зачетных единиц, **684** академических часа,
в том числе:
контактная работа: лекции **193** часа, практические занятия **210** часов, в т.ч. практическая подготовка – 0 часов;, самостоятельная работа: **281** час.

4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя её базовые составляющие УК-1.2 Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи УК-1.5 Рассматривает и предлагает возможные

	варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Оперирует базовыми знаниями в области основных математических и естественно-научных дисциплин, предусмотренных учебным планом ОПК-1.2 Решает типовые задачи основных математических и естественно-научных дисциплин, применяя стандартные приемы и методы ОПК-1.3 Выбирает различные методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний, полученных при изучении основных математических и естественно-научных дисциплин

5. Форма промежуточной аттестации: зачёт (3 семестр), экзамен (1,2,4 семестры).

6. Язык преподавания: русский**.**

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Само-стоя-тель-ная работа
		Лек-ции	Практи-ческие занятия	в т.ч. практическая подготовка	
1 семестр					
Раздел 1 Действительные числа	**16**	**6**	**2**		**4**
Натуральные числа. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.	6	2	1		2
Грани числовых множеств. Теоремы о существовании граней. Свойства граней. . Признаки граней.	6	2	1		2
Принцип Кантора. Расширенная числовая прямая.	4	2	0		0
Раздел 2 Функции	**16**	**6**	**2**		**6**
Понятие функции. Общие свойства функций.	7	2	1		2

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Само-стоя-тель-ная работа
		Лек-ции	Практи-ческие занятия	в т.ч. практическая подготовка	
Образ и прообраз множества при отображении. Классификация функций (инъективные, сюръективные, биективные отображения). Композиция функций. Обратная функция. Условия существования обратной.					
Числовые функции. Ограниченные, монотонные, периодические, четные и нечетные функции. Неявное задание функции. Параметрическое задание функции.	5	2	1		2
Элементарные функции. Свойства базисных элементарных функций. Классификация элементарных функций.	4	2	0		2
Раздел 3 Предел числовой последовательности	**24**	**10**	**6**		**4**
Предел числовой последовательности. Основные свойства: Сходимость и арифметические операции. Предельный переход в неравенствах. Бесконечные пределы.	14	6	4		2
Сходимость монотонной ограниченной последовательности. Число “*e*”. Существование монотонной подпоследовательности. Принцип Больцано – Вейерштрасса. Критерий Коши.	10	4	2		2
Раздел 4 Непрерывность числовой функции.	**42**	**16**	**8**		**10**
Предельные точки множества. Понятие предела функции в точке. Локальная ограниченность функции, имеющей предел в точке. Бесконечно малые функции. O – символика. Предел и арифметические операции. Предельный переход в неравенствах. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.	10	4	2		2
1-й и 2-й замечательные пределы. Другие эталонные пределы.	8	2	2		2
Понятие непрерывности функции в точке. Непрерывность и арифметические операции. Непрерывность композиции. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность функции, заданной параметрически. Понятие кривой.	10	4	2		2
Непрерывность и ограниченность. Теорема Вейерштрасса.	6	2	2		2

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Само-стоя-тель-ная работа
		Лек-ции	Практи-ческие занятия	в т.ч. практическая подготовка	
Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерывность и монотонность. Непрерывность обратной функции.	8	4	0		2
Раздел 5 Дифференциальное исчисление функций одной переменной	**102**	**34**	**18**		**30**
Понятие дифференцируемости функции в точке. Эквивалентные определения. Производная. Дифференциал. Геометрический смысл производной. Непрерывность дифференцируемой функции. Односторонняя дифференцируемость. Дифференцируемость функции, заданной параметрически. Гладкие кривые. Дифференцируемость элементарных функций.	16	6	2		4
Дифференцируемость композиции. Дифференцируемость и арифметические операции. Дифференцируемость обратной функции.	12	4	2		4
Экстремум одномерной функции. Необходимые условия. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теоремы о конечных приращениях. Условия монотонности одномерной функции. Достаточные условия экстремума в терминах первой производной.	16	4	2		6
Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталя	16	4	4		6
Высшие производные и дифференциалы. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши. Локальная формула Тейлора. Представление формулой Тейлора базисных элементарных функций.	12	6	2		2
Выпуклые функции. Непрерывность выпуклой функции. Односторонняя дифференцируемость. Выпуклые дифференцируемые функции. Условия выпуклости в терминах производных.	10	4	2		2
Асимптоты. Применение производной к построению графиков функций.	18	4	4		6
Итого в 1 семестре	**196**	**70**	**36**		**54**
2 семестр					
Раздел 6 Интегрирование одномерных функций	**109**	**30**	**18**		**41**

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Само-стоя-тель-ная работа
		Лек-ции	Практи-ческие занятия	в т.ч. практическая подготовка	
Разбиения отрезка. Верхние и нижние интегральные суммы (суммы Дарбу). Верхний и нижний интеграл. Понятие интеграла Римана. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций.	10	4	2		4
Основные свойства интеграла Римана: линейность, монотонность, аддитивность. Оценка модуля интеграла.	10	2	0		6
Понятие первообразной. Существование первообразной. Формула Ньютона-Лейбница	12	2	2		6
Неопределенный интеграл. Основные свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле.	17	2	4		7
Техника неопределенного интегрирования. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций.	18	4	2		6
Теоремы о среднем значении для интеграла Римана	6	2	2		2
Несобственные интегралы по бесконечному промежутку и от неограниченной функции. Основные свойства. Вычисление. Абсолютная сходимость. Признаки сходимости несобственных интегралов. Признаки сравнения. Признаки Абеля и Дирихле. Интегралы с несколькими особенностями.	16	6	2		4
Геометрические и физические приложения интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Спрямляемые кривые. Длина кривой.	20	8	4		6
Раздел 7 Числовые ряды	**24**	**8**	**4**		**8**
Понятие числового ряда. Общий член. Частные суммы. Сходимость числового ряда. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Остаток ряда. Критерий Коши. Абсолютная сходимость.	6	2	2		2
Ряды с положительными членами. Признаки сходимости: признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши. Признаки Куммера, Раабе, Бертрана, Гаусса. Интегральный признак.	6	2	0		2
Ряды с произвольными членами. Признаки	6	2	2		2

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Само-стоя-тель-ная работа
		Лек-ции	Практи-ческие занятия	в т.ч. практическая подготовка	
сходимости Лейбница, Абеля и Дирихле.					
Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.	6	2	0		2
Раздел 8 Функциональные и степенные ряды	**35**	**11**	**8**		**8**
Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши. Непрерывность предельной функции. Предельный переход под знаком интеграла. Сходимость последовательности производных.	7	3	2		2
Функциональные ряды. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Непрерывность суммы ряда. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.	9	3	0		2
Степенные ряды. Теорема Коши - Адамара. Радиус, интервал и область сходимости. Равномерная сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.	9	3	2		2
Ряд Тейлора. Условия сходимости. Разложение в степенной ряд базисных элементарных функций.	10	2	4		2
Раздел 9 Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.	**30**	**8**	**8**		**8**
Тригонометрический многочлен и тригонометрический ряд. Ортогональность тригонометрической системы функций. Вычисление коэффициентов равномерно сходящегося тригонометрического ряда. Ряд Фурье. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье. Теорема о квадратичном уклонении. Неравенство Бесселя. Стремление к нулю коэффициентов Фурье.	8	2	2		2
Ядро Дирихле. Интегральное представление частных сумм ряда Фурье.	8	2	2		2
Принцип локализации. Признак Дирихле сходимости ряда Фурье.	6	2	2		2
Суммы Фейера. Ядро Фейера. Интегральное представление сумм Фейера. Равномерная сходимость сумм Фейера. Теорема о	8	2	2		2

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Само-стоя-тель-ная работа
		Лек-ции	Практи-ческие занятия	в т.ч. практическая подготовка	
квадратичном уклонении. Равенство Парсеваля.					
Итого во 2 семестре	**185**	**57**	**38**		**51**
3 семестр					
Раздел 10 Дифференциальное исчисление функций многих действительных переменных	**68**	**28**	**32**		**8**
Пространство R^n. Канонический базис. Скалярное произведение. Норма в R^n. Покоординатная сходимость последовательности элементов R^n. Компактные множества в R^n. Линейные операторы в R^n. Обратимые линейные операторы. Условия обратимости. Функции многих переменных. Примеры. График. Линии уровня. Представление функции $f:\ R^m \to R^n$ координатными функциями. Предел и непрерывность функций многих переменных. Повторные пределы. Пределы по направлению. Непрерывность по фиксированной переменной. Теорема Вейерштрасса.	13	6	6		1
Понятие дифференцируемой функции $f:\ R^m \to R^n$. Градиент. Дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Частные производные. Структура градиента. Дифференцируемость функции в случае непрерывности частных производных. Дифференцируемость сложной функции. Дифференцируемость и арифметические операции. Геометрический смысл градиента. Касательная плоскость и нормаль. Производная по направлению	19	6	10	0	3
Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных частных производных. Формулы для вычисления дифференциалов высших порядков. Формула Тейлора. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума.	18	6	8	0	4
Дифференцируемые функции $f:\ R^m \to R^n$. Структура матрицы оператора-производной. Дифференцируемость композиции. Теоремы о конечных приращениях. Непрерывно	18	6	8	0	4

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Само-стоя-тель-ная работа
		Лек-ции	Практи-ческие занятия	в т.ч. практическая подготовка	
дифференцируемые функции и диффеоморфизмы. Теорема об обратной функции. Теорема о неявной функции. Отыскание производных неявных функций. Условный экстремум. Правило множителей Лагранжа.					
Раздел 11 **Кратные интегралы**	**34**	**16**	**14**	**0**	**14**
Внешняя и внутренняя мера множества на плоскости. Измеримые по Жордану множества. Мера Жордана. Критерии измеримости. Монотонность и конечная аддитивность меры. Множества меры нуль. Мера Жордана в пространствах R^2 и R^3.	8	4	2	0	2
Двойные интегралы. Линейность, монотонность и конечная аддитивность двойного интеграла. Вычисление двойных интегралов сведением к повторным. Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам. Тройные интегралы и интегралы высшей кратности. Приложения кратных интегралов.	26	12	12	0	2
Раздел 12 **Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности**	**32**	**14**	**14**	**0**	**4**
Естественная параметризация кривой. Ориентация кривой. Понятие криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление сведением к определенному интегралу. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода и определенным интегралом.	9	4	4	0	1
Формула Грина. Независимость криволи-нейного интеграла от пути интегрирования. Приложения криволинейных интегралов.	9	4	4	0	1
Понятие поверхности. Параметрическое задание поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Ориентация поверхности. Кривые на поверхности. Площадь поверхно-сти. Интегралы по поверхности 1-го и 2-го рода. Сведение к двойному интегралу. Теоремы Стокса и Остроградского – Гаусса.	14	4	6	0	4
Раздел 13 **Интегралы с параметрами**	**34**	**10**	**12**	**0**	**12**

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Само-стоя-тель-ная работа
		Лек-ции	Практи-ческие занятия	в т.ч. практическая подготовка	
Собственные интегралы с параметрами. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость по параметру. Несобственные интегралы с параметрами. Равномерная сходимость. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость по параметру.	12	6	6	0	6
Эйлеровы функции. Непрерывность и дифференцируемость. Связь гамма и бета функций. Асимптотическое поведение гамма функции. Формула Стирлинга. Вычисление определенных интегралов с помощью Эйлеровых функций.	18	4	6	0	6
Итого в 3 семестре	**144**	**34**	**51**	**0**	**59**
4 семестр					
Раздел 14 **Поле комплексных чисел**	**30**	**8**	**10**	**0**	**12**
Поле комплексных чисел, аксиоматика множества комплексных чисел.	6	2	2	0	2
Модуль и аргумент комплексного числа. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Степень и радикал, формула Муавра.	6	2	2	0	2
C как метрическое пространство. Евклидова и сферическая метрики. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана. Сходящиеся последовательности в C и $\overline{\mathbf{C}}$. Лемма о покоординатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса. Полнота и компактность расширенной комплексной плоскости.	10	2	4	0	4
Топологии в C и $\overline{\mathbf{C}}$ (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).	8	2	2	0	4
Раздел 15 **Функции комплексной переменной**	**29**	**9**	**12**	**0**	**8**
Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного. Непрерывность в сферической метрике. Теоремы о непрерывных функциях комплексного переменного на компакте,	8	2	4	0	2

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Само-стоя-тель-ная работа
		Лек-ции	Практи-ческие занятия	в т.ч. практическая подготовка	
континууме, в области.					
Дифференцируемость в смысле действительного и комплексного анализа. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Формальные производные. Критерий моногенности. в точке, условия Коши-Римана. Производная голоморфной функции.	12	4	4	0	4
Касательное отображение и якобиан дифференцируемого отображения. Локальное поведение дифференцируемого отображения с ненулевым якобианом. Локальное поведение голоморфного отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.	9	3	4	0	2
Раздел 16 Конформные отображения	**46**	**12**	**18**	**0**	**16**
Определение конформного отображения в точке и области. Достаточные условия конформности отображения. Основные принципы теории конформных отображений, теорема Римана о конформных отображениях.	4	2	0	0	2
Мебиусовы преобразования. Определение, конформность на $\overline{\mathbf{C}}$. Групповое свойство мебиусовых преобразований. Декомпозиция мебиусовых преобразований. Круговое свойство мебиусовых преобразований. Симметрия точек относительно окружности и ее сохранение при мебиусовых преобразованиях. Ангармоническое отношение упорядоченной четверки точек и его инвариантность при мебиусовых преобразованиях. Теорема о существовании и единственности мебиусова преобразования, нормированного соответствием четырех пар точек. Вычисление групп мебиусовых автоморфизмов круга и полуплоскости. Понятие о модели Пуанкаре геометрии Лобачевского.	16	4	6	0	6
Степенная функция с натуральным показателем, области её однолистности и конформности, глобальное обращение. Риманова поверхность и ветви радикала	8	2	4	0	2
Определение экспоненты, её аналитические и геометрические свойства: голоморфность на C, теорема сложения, необращение в нуль, периодичность, локальная однолистность, конформность. Области однолистности	10	2	4	0	4

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Само-стоя-тель-ная работа
		Лек-ции	Практи-ческие занятия	в т.ч. практическая подготовка	
экспоненты. Глобальное обращение, построение римановой поверхности логарифмической функции.					
Функция Жуковского и ее аналитические и геометрические свойства. Риманова поверхность функции, обратной к функции Жуковского.	8	2	4	0	2
Раздел 17 Интегралы от функций комплексного переменного	**23**	**10**	**4**	**0**	**9**
Криволинейные интегралы в ТФКП. Определение, свойства, примеры, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода из курса действительного анализа. Переход к пределу под знаком интеграла.	5	2	1	0	2
Интегральная теорема Коши и её обобщение на многосвязные области.	5	2	1	0	2
Интегральная формула Коши.	4	2	1	0	1
Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.	4	2	0	0	2
Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.	5	2	1	0	2
Раздел 18 Ряды Тейлора и Лорана	**32**	**10**	**16**	**0**	**6**
Последовательности и ряды аналитических функций в области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций.	5	2	2	0	1
Степенные ряды. Теорема Абеля. Теорема о круге сходимости, формула Коши – Адамара. Локально равномерная сходимость степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование рядов.	7	2	4	0	1
Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы, единственность разложения. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.	5	2	4	0	1
Ряды Лорана, структура области сходимости. Теорема о представлении голоморфной функции рядом Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.	9	2	6	0	1
Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании	4	2	0	0	2

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа			Самостоятельная работа
		Лекции	Практические занятия	в т.ч. практическая подготовка	
комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы. Внутренняя теорема единственности. Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.					
Раздел 6 Изолированные особые точки и вычеты	**38**	**8**	**16**	**0**	**14**
Изолированные особые точки голоморфной функции, классификация изолированных особых точек однозначного характера: устранимая особая точка, полюс, порядок полюса, существенная особая точка. Бесконечно удаленная точка как особая. Критерии изолированных особых точек. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара. Классификация и критерии изолированной особой точки на бесконечности.	10	2	4	0	4
Определение вычета в изолированной особой точке и формулы для вычисления вычетов. Примеры. Вычисление вычета на бесконечности. Примеры. Теорема Коши о вычетах. Теорема о сумме вычетов.	12	2	6	0	4
Применения вычетов для нахождения определенных интегралов. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов и главных значений интегралов от действительнозначных функций. Примеры.	10	2	4	0	4
Итого в 4 семестре	**180**	**51**	**51**	**0**	**78**
Итого по курсу	**684**	**193**	**210**	**0**	**281**

III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем *(в строгом соответствии с разделом II РПД)*	Вид занятия	Образовательные технологии
Действительные числа. Функции	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, групповое решение творческих задач.

Предел числовой последовательности	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, компьютерная визулизация, групповое решение творческих задач.
Дифференциальное исчисление функций одной переменной	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, групповое решение творческих задач.
Интегрирование одномерных функций	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, групповое решение творческих задач.
Числовые ряды Функциональные и степенные ряды	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, групповое решение творческих задач.
Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, компьютерное моделирование, групповое решение творческих задач.
Дифференциальное исчисление функций многих действительных переменных	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, компьютерное решение, групповое решение творческих задач.
Кратные интегралы Криволинейные интегралы и интегралы по поверхностим	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, компьютерное решение, групповое решение творческих задач.
Интегралы с параметрами	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, групповое решение творческих задач.
Поле комплексных чисел Функции комплексной переменной	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, групповое решение творческих задач.
Конформные отображения	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, компьютерная визулизация, групповое решение творческих задач.
Интегралы от функций комплексного переменного	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, групповое решение творческих задач.
Ряды Тейлора и Лорана	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, компьютерное моделирование, групповое решение творческих задач.
Изолированные особые точки и вычеты	Лекция, практическое занятие	Традиционная лекция, лекция-визуализация, компьютерное решение, групповое решение творческих задач.

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Типовые контрольные задания

Введение в анализ

1. Приведите определение верхней грани множества.
2. Приведите пример множества, имеющего верхнюю грань и не имеющего наименьшего элемента.
3. Найдите верхние и нижние грани множеств.

   3.1. $\{0{,}1;\ 0{,}011;\ 0{,}00111,\ \ldots\}$ 3.2. $\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\ :\ n \in N\right\}$
4. Приведите пример множества, имеющего верхнюю грань и не имеющего наименьшего элемента
5. Приведите определение функции.
6. Среди кривых, приведенных на рисунках, выберите те, которые являются графиками функций.
7. Приведите пример предела последовательности.
8. Приведите примеры последовательностей, имеющих конечный предел, имеющих бесконечный предел, не имеющих предела.
9. Приведите определение предела функции в точке.
10. Приведите примеры функций, имеющих конечный предел, имеющих бесконечный предел, не имеющих предела в заданной точке.
11. Приведите определение непрерывной функции.
12. Приведите примеры разрывных функций, имеющих точки разрыва различных типов.

Дифференцирование одномерных функций. Экстремум одномерной функции.

Интегрирование одномерных функций.

1. Приведите определение дифференцируемости функции в точке и производной функции в точке.
2. Укажите связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Приведите необходимые примеры.
3. Определите, является ли функции $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sign} x$ и $f(x) = x \cdot \operatorname{sign} x$ дифференцируемыми в точке $x = 0$.
4. Найдите производные функции

   4.1. $f(x) = \cos^2\left(12x + \frac{\pi}{12}\right)$ 4.2. $f(x) = e^{2(x+1)^2}$.
5. Приведите определение точек локального максимума и точек локального минимума функции.
6. Приведите примеры точек локального максимума и точек локального минимума функции. Покажите геометрическую интерпретацию.

7. Приведите примеры функций, не имеющих локальных экстремумов.
8. Сформулируйте необходимое условие экстремума.
9. Сформулируйте достаточное условие экстремума.
10. Найдите точки экстремума функции f

    10.1. $f(x)=x^2(x-1)$ 10.2. $f(x)=x\cdot|x-1|$ 10.3. $f(x)=|x|e^{-x}$.
11. найдите наибольше и наименьшее значение функции f на промежутке Δ

    11.1. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^4-1,\ \ \Delta=[-1;1]$ 11.2. $f(x)=x\cdot e^{-x},\ \ \Delta=[-1;1]$
12. Сформулируйте определение интеграла Римана по отрезку.
13. Укажите классы интегрируемых функций.
14. Приведите пример неинтегрируемой функции.
15. Сформулируйте определение первообразной функции.
16. Найдите первообразную F для функции $f(x)=\operatorname{sign}x$, такую, что $F(0)=0$.
17. Приведите формулу разложения Рациональной дроби на элементарные.
18. Найдите неопределенные интегралы.

    18.1. $\int\frac{dx}{x^2-x-2}$ 18.2. $\int\frac{dx}{x^2-x-2}$ 18.3. $\int\frac{dx}{x^3-1}$
19. Найдите определенные интегралы.

    19.1. $\int\limits_1^2\frac{\lg x}{x^2}dx$ 19.2. $\int\limits_0^{\pi}x^2\cos x dx$ 19.3. $\int\limits_0^1 x^2e^{x^3}dx$
20. Приведите определения числового ряда, сходящегося числового ряда. Приведите примеры сходящихся и расходящихся рядов.
21. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда. Является ли необходимое условие сходимости достаточным. Приведите примеры.
22. Сформулируйте достаточные признаки сходимости положительных рядов. Являются ли достаточные условия сходимости необходимыми.
23. Сформулируйте определения абсолютно сходящегося числового ряда, условно сходящегося числового ряда. Приведите примеры.
24. Сформулируйте достаточные признаки сходимости рядов с произвольными членами. Приведите примеры, показывающие, что все условия теорем являются существенными.
25. Сформулируйте признаки абсолютной сходимости.
26. Сформулируйте определение знакочередующегося сходящегося числового ряда, признаки сходимости. Приведите примеры, показывающие, что все условия теорем являются существенными.
27. Сформулируйте определение функциональной последовательности, определения поточечной сходимости, области сходимости, предельной функции.
28. Сформулируйте определение равномерной сходимости функциональной

последовательности.

29. Сформулируйте достаточные условия непрерывности предельной функции. Являются ли достаточные условия необходимыми? Может ли последовательность непрерывных функций сходиться равномерно к разрывной функции.
30. Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости предельной функции. Являются ли достаточные условия необходимыми?
31. Сформулируйте определение функционального ряда, определения поточечной сходимости, области сходимости, суммы ряда.
32. Сформулируйте определение равномерной сходимости функциональной ряда.
33. Сформулируйте достаточные условия непрерывности суммы ряда. Являются ли достаточные условия необходимыми?
34. Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости суммы ряда. Являются ли достаточные условия необходимыми?
35. Сформулируйте определение степенного ряда, опишите структуру области сходимости, характер сходимости.
36. Приведите способы отыскания радиуса сходимости степенного ряда.
37. Сформулируйте определения рядов Тейлора, Маклорена.
38. Сформулируйте достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора.
39. Получите разложения в степенной ряд основных элементарных функций, укажите области сходимости полученных рядов.
40. Сформулируйте определение тригонометрического ряда, тригонометрического ряда Фурье.
41. Сформулируйте теоремы о сходимости в точке ряда Фурье кусочно-непрерывной, непрерывной функций.
42. Опишите идеологию разложения в ряд Фурье непериодических функций.
43. Сформулируйте определение интеграла Фурье, признаки сходимости.

Комплексный анализ

1. Дайте определение модуля, аргумента комплексного числа.
2. Дайте определение алгебраического корня из комплексного числа
3. Дайте определение открытого и замкнутого множеств, предельных и граничных точек, границы, замыкания, связности множества, области, компакта, континуума.
4. Дайте определение непрерывности ф.к.п. в евклидовой и сферической метриках.
5. Дайте определение моногенной и голоморфной функции.
6. Сформулируйте условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах.
7. Сформулируйте геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.

8. Сформулируйте групповое свойство мёбиусовых преобразований.
9. Сформулируйте круговое свойство мёбиусовых преобразований
10. Сформулируйте теорему о существовании и единственности мёбиусова преобразования, нормированного соответствием трёх пар точек.
11. Определить образ полярной сетки при отображении степенной функцией с натуральным показателем.
12. Сформулируйте определение экспоненты, приведите её аналитические и геометрические свойства.
13. Дайте определение логарифма.
14. Сформулируйте теорему Римана о конформных отображениях, основные принципы конформных отображений.
15. Сформулируйте интегральную теорему Коши-Гурса.
16. Сформулируйте интегральную формулу Коши.
17. Сформулируйте теорему Морера.
18. Привести формулы Коши для производных голоморфной функции.
19. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
20. Сформулируйте теорему Абеля о степенных рядах.
21. Сформулируйте теорему о представлении голоморфной функции степенным рядом.
22. Привести разложения основных элементарных функций в ряды Тейлора.
23. Сформулируйте теорему Лиувилля.
24. Сформулируйте теорему Лорана.
25. Привести неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
26. Сформулируйте внутреннюю теорему единственности.
27. Дайте определение изолированной особой точки голоморфной функции, привести их классификацию.
28. Сформулируйте критерии устранимой особой точки и полюса.
29. Сформулируйте критерий существенной особой точки.
30. Дайте определение вычета в изолированной особой точке и приведите формулы для вычисления вычетов.
31. Сформулируйте теорему Коши о вычетах.
32. Сформулируйте теорему о сумме всех вычетов.
33. Сформулируйте принцип аргумента.
34. Сформулируйте теорему Руше.

V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) Основная литература

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 1 — 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-

8114-7061-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/154399

2. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 2 — 2020. — 800 с. — ISBN 978-5-8114-4866-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/126708
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020 — Том 3 — 2020. — 656 с. — ISBN 978-5-8114-6652-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/149365
4. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник / И. И. Привалов. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-0913-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/167779

б) дополнительная литература

1. Рощенко, О. Е. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения : учебно-методическое пособие / О. Е. Рощенко, Е. А. Лебедева. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2019. — 76 с. — ISBN 978-5-7782-3944-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/98715.html
2. Жукова, Г. С. Математический анализ в примерах и задачах. Часть 1 : учебное пособие / Г. С. Жукова, М. Ф. Рушайло. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 260 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-015963-8. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1072156
3. Кутузов, А. С. Математический анализ: дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : [16+] / А. С. Кутузов. – 2-е изд. стер. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2017. – 127 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=462166
4. Шершнев, В. Г. Математический анализ: сборник задач с решениями : учеб. пособие / В.Г. Шершнев. — Москва : ИНФРА-М, 2018. — 164 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). ISBN 978-5-16-005487-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/958345
5. Половинкин, Е. С. Теория функций комплексного переменного : учебник / Е. С. Половинкин. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 254 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-013608-0. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1125614

6. Ахтамова, С. С. Теория функций комплексного переменного : учебно-методическое пособие / С. С. Ахтамова, Е.К. Лейнартас, А. П. Ляпин. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. - 100 с. - ISBN 978-5-7638-4330-9. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1816573
7. Богомолова, Е. В. Теория функций комплексной переменной : учебное пособие / Е. В. Богомолова. — Дубна : Государственный университет «Дубна», 2018. — 107 с. — ISBN 978-5-89847-540-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/154470
8. Пономарев, А. В. Теория функций комплексного переменного : методические указания / А. В. Пономарев, И. Э. Бессарабская. — Москва : РТУ МИРЭА, 2019. — 46 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/171497
9. Нахман, А. Д. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / А. Д. Нахман. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 212 с. — ISBN 978-5-4486-0597-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/80317.html
10. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М., Дрофа, 2004, 640 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.- Т. 1, 2, 3.- М.: Наука, 2003.
12. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч. 1, 2. – М., ВШ, 2001.
13. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Начала теории. Т.l. М. Лань, 2009, 480 с.
14. Гусев А.И. Конспект лекций по математическому анализу. Сервер локальной сети ТвГУ.
15. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. Аст. Астрела, 2002.

IV.Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций

Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	1. Определите, начиная с какого номера, члены последовательности $x_n = 7n^3 - 17n^2 - 6$ монотонно возрастают. 2. Найдите верхнюю и нижнюю грани функции $f(x) = e^{1-x-x^2}$, $x \in [0, +\infty)$. 3. Покажите, что для функций $u = x^4 + y^4$ и $u = x^4 - y^4$ не применим достаточный признак экстремума. Выясните, имеют ли данные функции точки локального экстремума. 4. Определите порядок нуля в точке $z = 0$ функции $f(z) = z^5\left(\sin z^3 - z^3 + \frac{1}{6}z^9\right)$.	Получен верный ответ с помощью встроенных инструментов или собственного программного кода – 2 балла. Получен верный ответ на основе визуализации – 1 балл. Ответ неверный или ответа нет – 0 баллов.
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	1. Найдите производную $\frac{d^5}{dx^5}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$. 2. Вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. 3. Опишите алгоритм поиска экстремума функции двух переменных, основанный на достаточном признаке. Реализуйте алгоритм для функции $u = e^{2x+3y}\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right)$. 4. Найдите все нули функции $f(z) = z\left(e^z - 1\right)$ и определите их порядки.	Получен верный ответ с помощью встроенных инструментов или собственного программного кода – 1 балл. Ответ неверный или ответа нет – 0 баллов.
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	1. Дайте определение ряда Тейлора действительной функции одного действительного переменного, сформулируйте условия его сходимости. Опишите средства математического пакета для представления функции рядом Тейлора и определения области его сходимости. 2. Сформулируйте теорему	Верно формулирует определения и утверждения, полно описывает инструменты – 3 балла. Верно формулирует, не знает инструментов – 1 балл. Не знает – 0 баллов.

	Вейерштрасса о непрерывной функции, заданной на отрезке, опишите алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений функции, заданной на отрезке, опишите инструменты математического пакета для решения такой задачи. 3. Дайте определение локального экстремума функции двух переменных. Докажите необходимые и достаточные условия экстремума. 4. Дайте определение нуля порядка N голоморфной функции. Получите факторизацию функции в окрестности нуля.	

Типовые задачи для промежуточного контроля

Дифференцирование одномерных функций. Экстремум одномерной функции

1. Определите, будет ли функция $f(x)=\sqrt{|x|}\cdot\sin\sqrt{|x|}$ дифференцируема в точке $x=0$.

2. Найдите производную функции $f(x)=\sin^2 2\left(x^2+\dfrac{x\cdot e^{\sqrt{x}}}{ar\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{x}}\right)$.

3. Найдите касательные функции $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$, в неподвижных точках этой функции.

4. Определите, сколько раз функция $f(x)=(x-|x|)\cdot x^2$ дифференцируема в точке $x=0$.

5. Пусть $f(x)=x\cdot\sin\pi x$. Докажите, что для любого числа M найдется точка $x_0>M$, такая, что $f'(x_0)=0$.

6. Найдите пределы 6.1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}-\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln x-x+1}$. 6.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin^2 x}{\ln(1+x)-x^2}$

7. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции $f(x)=|x-1|e^{-|x-1|}$.

8. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ на отрезке $[2;4]$.

9. Найдите равнобедренный треугольник наибольшей площади, вписанный в окружность заданного радиуса

10. Докажите неравенство $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$, $x > 1$. Приведите геометрическую иллюстрацию.

11. Найдите промежутки выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба функции $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

12. Найдите вторую производную функции $f(x) = x^3 + \operatorname{arctg} x$.

Неопределенный интеграл. Определенный интеграл.

1. Найдите интегралы.

1.1. $\int (x-1)(2x+3)^{12}dx$ 1.2. $\int \frac{(x^2-2x+2)\ln(x+1)+2x}{x^2-2x+2}dx$.

1.3. $\int \frac{2x^3-2x^2+4x}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)}dx$. 1.4. $\int x \cdot \sin 3x\, dx$

1.5. $\int \frac{\sqrt{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$. 1.6. $\int \frac{e^{2x+1}}{\sqrt{1+e^x}}dx$. 1.7. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

1.7. $\int\limits_{-3}^{1} x\sqrt{\frac{3+x}{2}}dx$. 1.8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sin x + \cos^2 x}dx$

1.9. $\int\limits_{0}^{1}\left(x^3 + e^{\frac{x}{10}} - \sin\frac{\pi}{6}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)dx$ 1.10. $\int\limits_{0}^{0,5}(2x-1)\cdot e^{4x^2-4x+1}dx$

1.11. $\int\limits_{1}^{e}\ln 2x \cdot dx$ 1.12. $\int\limits_{-1}^{0} x^3\sqrt{1-x^2}dx$

Несобственный интеграл. Приложения интеграла.

1. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y = \sin 2x$ и $y = \frac{4}{\pi}x$

2. Найдите длину кривой $x = 2t^2$, $y = \frac{4}{3}t^3$, $t \in [0;2]$

3. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл.

3.1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\ln\frac{x^2+1}{x^2}dx$. 3.2. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos\pi x}{\sqrt{x}}dx$. 3.3. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt[6]{x^3+x^4}}{x}dx$.

Числовые ряды

1. Исследуйте на сходимость ряд.

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+3}$ 1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5+3}}$ 1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n}$ 1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+3^n}$

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{n^2-1}{\sqrt{n^4+1}}\right)$. 1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$. 1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{\pi}{2n}$.

Функциональные и степенные ряды

1. Исследуйте функциональную последовательность $\{f_n\}$ на сходимость и равномерную сходимость на множестве A.

1.1. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$, $A=[0;1]$. 1.2. $f_n(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}$, $A=(0;+\infty)$.

2. Исследуйте на равномерную сходимость функциональный ряд на множестве A.

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $A=(0;+\infty)$. 2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n!)}$, $A=(0;+\infty)$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} x}{n+x^2}$, $A=(-\infty;+\infty)$. 2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x^2}\cos nx$, $A=[0;\pi]$.

3. Найдите радиус интервал и область сходимости степенного ряда.

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$. 3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n!)}x^n$.

4. Функцию f разложите в ряд Маклорена и найдите область сходимости этого ряда.

4.1. $f(x)=e^{-x^2}$. 4.2. $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$. 4.3. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

5. Найдите сумму ряда

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. 5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.

1. Функцию $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x, & x\in[0;\frac{3}{4}\pi],\\ 2(\pi-x), & x\in(\frac{3}{4}\pi;\pi]\end{cases}$ разложите в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0;\pi]$.

2. Функцию $f(x)=\operatorname{sign}(\sin\pi x)$ разложите в ряд Фурье на всей числовой прямой. Напишите равенство Парсеваля. Найдите суммы рядов $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m+1}}{2m-1}$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^2}$.

Дифференциальное исчисление функций многих действительных переменных

1. Найдите $\dfrac{\partial f(0,0,0)}{\partial z}$ для функции $f(x,y,z)=\begin{cases} z\cdot\sin\frac{1}{z}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}, & z\neq 0, \\ 0, & z=0 \end{cases}$

2. Найдите $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ для функции $f(x,y,z)=x^{x\cdot\ln yz}$

3. Найдите $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$ для функции $f(x,y,z)=e^{xyz}\cdot\cos x$

4. Найдите $df\left(\frac{\pi}{2},1,0\right)$ и $d^2f\left(\frac{\pi}{2},1,0\right)$ для функции $f(x,y,z)=z\cdot\sin xy+\frac{1}{y}\cdot\cos xz$

5. Найдите касательную плоскость к функции $f(x,y)=1+x^2-y^2$, параллельную плоскости $p(x,y)=1-x+y$

6. Найдите точки локального экстремума функции

6.1 $f(x,y,z)=xy^2(1-x-y-z)$ 6.2 $f(x,y)=\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}$

7. Найдите точки условного экстремума функции f, при заданных ограничениях.

7.1. $f(x,y,z)=xy^2,\quad x+y=z$

7.2. $f(x,y,z)=xy+z,\quad x^2+y^2=2,\quad x+y+z=3$.

2. Двойные и тройные интегралы, их приложения.

1. Найдите двойной интеграл по области *G*, ограниченной указанными линиями

1.1. $\iint\limits_G \cos(x-y)dxdy,\ \ x=y,\ x=0,\ y=\pi$

1.2. $\iint\limits_G xydxdy,\ \ x=y,\ x=1,\ y=0$

1.3 $\iint\limits_G e^{2x-y}dxdy,\ \ 2x=y,\ 2x=y+1,\ y=0,\ y=1$

1.4. $\iint\limits_G \dfrac{2y}{x}dxdy,\ \ x^2=y,\ 2x=y,\ x=1,\ x=2$

2. Найдите тройной интеграл по области *G*, ограниченной указанными поверхностями

2.1. $\iiint\limits_G xdxdydz,\ \ x=0,\ y=0,\ z=1,\ x+y+z=2$

2.2. $\iiint\limits_G \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+y^2}dxdydz,\ \ x=\frac{1}{2},\ y=0,\ z=0,\ x^2+y^2=1,\ z=x^2+y^2$

2.3. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz,\ \ x=0,\ z=0,\ z=1,\ x^2+y^2=1,\ (x\geq 0)$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

3.1. $4y=x^2-4x,\quad x=y+3$

3.2.. $x=2y,\quad y=3x,\quad 3x=2-y,\quad x=4-2y$

4. Найдите объем тела ограниченного поверхностями

4.1. $x^2+y^2=2x, \quad z=x^2+y^2, \quad z=0$

3. Криволинейные и поверхностные интегралы.

1. Найдите криволинейные интегралы

1.1. $\int\limits_l (2x+y)ds,\ l=ABOA,\ A=(1,0),\ B=(0,2),\ O=(0,0)$

1.2. $\int\limits_l \sqrt{y}ds,\ l:\ x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$

1.3. $\int\limits_l ydx-xdy,\ l: y=x^3,\ 0\le x\le 2$

1.4. $\int\limits_l (x-y)dx-(x+y)dy,$ l – произвольный путь, соединяющий точки $A=(2,-1),\ B=(1,0)$.

2. Используя формулу Грина, найдите интеграл

$\int\limits_{\partial G} e^x(1-\cos y)dx-e^x(y-\sin y)dy,\ G=\{(x,y):\ x\in[0,\pi],\ 0\le y\le \sin x\}$

4. Интегралы с параметрами.

1. Найдите предел $\lim\limits_{\alpha\to 1}\int\limits_0^\infty \frac{2-\alpha^2}{\sqrt{1-(\alpha-3)x^2+\alpha x^4}}dx$.

2. Найдите производную функции $J(\alpha)=\int\limits_\alpha^{2\alpha}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx$.

4. Найдите интегралы, используя функции Эйлера

4.1. $\int\limits_0^\infty \frac{x^4}{e^{4x}}dx$ 4.2. $\int\limits_0^2 x^4(2-x)^5dx$ 4.3. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^7 x\cdot\cos^5 x+\sin x\cdot\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}dx$

Комплексные числа

1. Найти все значения радикала $\sqrt[3]{1-i}$.
2. Найти все значения i^i.
3. Вычислить $\frac{(1+2i)^2-i}{4-(1-i)^3}$ и изобразить точку на плоскости.
4. Вычислить $\ln(-1)$.
5. Вывести формулы стереографической проекции и формулу для сферического расстояния. Найти сферическое расстояние между точками 1 и i, i и $2i$.
6. Написать комплексные параметрические уравнения окружности с данным центром и радиусом, эллипса и гиперболы с фокусами в точках ± 1 и данными полуосями, параболы $y=x^2$, $x\in\mathbf{R}$, отрезка прямой, соединяющей две точки.

Голоморфные функции

7. Является ли функция $w = z\mathrm{e}^{2i\bar{z}}$ голоморфной в начале координат? Докажите голоморфность функций $\sin z$ и $\operatorname{ch} z$ на $\mathbf{C}$.
8. Восстановите голоморфную функцию по заданной ее реальной части $u = x^3 - 3x^2y + 2x^2 - 2y^2 + \mathrm{e}^x \sin y,\ (x, y) \in \mathbf{C}$.

Конформные отображения

9. Методом слоений найти образы верхнего единичного полукруга при преобразованиях $w = 1/z$, $w = 1/\bar{z}$ и $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.
10. Найти общий вид мебиусовых преобразований верхней полуплоскости на себя, верхней полуплоскости на единичный круг, единичного круга на себя.
11. Какая часть плоскости сжимается при отображении $w = \dfrac{z}{2z - 1}$? Какая часть плоскости растягивается при отображении $w = \mathrm{e}^{2iz}$?
12. Описать схему построения конформного преобразования кругового двуугольника на верхнюю полуплоскость. Единичный круг с разрезом по радиусу отобразить конформно на верхнюю полуплоскость.
13. Область, заключенную между единичной окружностью и окружностью с диаметром $[0,1] \subset \mathbf{R}$, отобразить конформно на единичный круг.
14. Найти конформный образ полуполосы $\Pi = \{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ с помощью функций: (а) $w = \sin z$; (б) $w = \cos z$; (в) $w = \operatorname{tg} z$.

Ряды Тейлора и Лорана

15. Найти область сходимости функционального ряда:

$$\text{(а)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{2\nu}}{3^\nu}; \quad \text{(б)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sin^\nu(z); \quad \text{(в)} \sum_{\nu=-1}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^\nu .$$

16. Найти нули и изолированные особые точки функций:

$$\text{(а)} \frac{z\cos z}{\sin^2 z}; \quad \text{(б)} \frac{\sin^2 z}{\mathrm{e}^z - 1}; \quad \text{(в)} \frac{z^2 - zi}{\mathrm{e}^{1/z} + 1}.$$

Определить порядки нулей и классифицировать изолированные особые точки.

17. Представить рядами Лорана в проколотой окрестности точки $z=a$ следующие функции

$$\text{(а)} \frac{z}{z^2 - 3z + 2},\ a = 1; \quad \text{(б)} \frac{z^2}{z^3 + 1},\ a = \infty;$$

$$\text{(в)} \frac{\sin^2 z}{z},\ a = 0; \quad \text{(г)} \frac{\operatorname{ch}^2 z}{z^2},\ a = 0.$$

Вычеты и их применение

18. Найти вычеты заданной функции в ее изолированной особой точке, включая точку $z = \infty$:

(a) $\dfrac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2}$; (б) $\dfrac{z}{\operatorname{ch} z - 1}$;

(с) $z^3 \sin\dfrac{\pi}{z}$; (д) $\sin z \cdot \sin\dfrac{1}{z}$.

19. Вычислить с помощью теоремы о вычетах интегралы:

(а) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{z}{z+3} e^{1/3z}\, dz$; (б) $\oint\limits_{|z+1|=2} \dfrac{dz}{z \sin z}$;

(в) $\oint\limits_{|z|=2} z \sin\dfrac{z+1}{z-1}\, dz$; (г) $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{dz}{(2+\sqrt{z-1})\sin z}$, $\left(\sqrt{z-1}\big|_{z=0} = i\right)$.

20. Применяя лемму Жордана, вычислить интегралы:

(а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^3 \sin x\, dx}{x^4+5x^2+4}$; (б) $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{\cos x\, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^3)}$, $0<a<b$;

(с) $\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\cos x\, dx}{x^2-5x+6}$; (д) $\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin x\, dx}{(x^2+4)(x-1)}$.

21. Вычислить интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi$:

(а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{5+3\cos\varphi}$; (б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\cos n\varphi\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$, $-1<a<1$, $n \in \mathbf{N}$;

(в) $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{1-a\sin^2\varphi}$, $0<a<1$; (г) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{(1+2\cos\varphi)^n}{5+4\cos\varphi} \cos n\varphi\, d\varphi$, $n = 0,1,\ldots$

22. Вычислить несобственные интегралы от рациональных функций:

(а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$; (б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a>0$, $n \in \mathbf{N}$;

(в) $\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\, dx}{x^3+1}$; (г) $\text{v.p.}\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x^2\, dx}{x^4-1}$.

Вопросы к зачетам и экзаменам

1 семестр (зачёт)

1. Множества. Подмножества. Примеры. Теоретико-множественные операции с множествами: объединение, пересечение, разность множеств.
2. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли.
3. Бином Ньютона.
4. Понятие десятичной дроби и действительного числа. Конечные десятичные дроби. Отношение порядка на множестве действительных чисел. Свойства отношения порядка.
5. Ограниченные множества. Верхние и нижние грани. Примеры. Свойства. Теоремы о существовании верхней и нижней грани.
6. Признаки верхней и нижней грани.
7. Рациональные и иррациональные числа.

8. Принцип Кантора. Принцип Бореля – Лебега.

9. Понятие отношения и функции. Примеры. Значение функции в точке. Область определения и множество значений функции. График функции. Различные способы задания функции.

10. Образ и прообраз множества при отображении. Примеры. Свойства.

11. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Примеры.

12. Композиция функций. Примеры.

13. Понятие обратной функции. Примеры.

14. Условия существования обратной функции.

15. Числовые функции. Ограниченные функции. Монотонные функции. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Примеры. Свойства.

16. Элементарные функции. Классификация элементарных функций.

17. Функции, заданные параметрически, и функции, заданные неявно.

18. Понятие последовательности. Подпоследовательность. Примеры.

19. Понятие предела числовой последовательности. Примеры.

20. Основные свойства числовых последовательностей. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Сходимость подпоследовательности.

21. Предел числовой последовательности и арифметические операции. Неопределенности.

22. Предельный переход в неравенствах.

23. Теорема о пределе промежуточной последовательности.

24. Сходимость монотонной ограниченной последовательности.

25. Число e как верхняя грань и как предел.

26. Существование монотонной подпоследовательности у произвольной последовательности. Принцип Больцано – Вейерштрасса.

27. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

28. Бесконечно малые последовательности. Предел произведения бесконечно малой и ограниченной последовательности.

29. Понятие предельной точки множества. Примеры. Характеризация предельной точки множества в терминах последовательностей элементов множества

30. Понятие предела функции в точке. Эквивалентные определения.

31. Односторонние пределы. Теорема о существовании предела функции в терминах односторонних.

32. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне.

33. Основные свойства предела функции в точке. Единственность предела. Локальная ограниченность функции имеющей конечный предел в точке.

34. Предел функции в точке и арифметические операции. Неопределенности при вычислении пределов. Предельный переход в неравенствах. Теорема о пределе промежуточной функции.

35. Теорема о пределе сложной функции.

36. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

37. Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

38. Эталонные пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$,

39. Эталонные пределы: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0$, $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha\cdot\log_a x=0$.

40. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Эквивалентные функции. O – символика. Примеры. Свойства.

41. Понятие непрерывной функции в точке. Эквивалентные определения. Примеры.

42. Односторонняя непрерывность. Примеры. Условие непрерывности в терминах односторонней. Классификация точек разрыва функции.

43. Непрерывность функции в точке и арифметические операции. Непрерывность композиции непрерывных функций.

44. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции.

45. Теоремы об обращении непрерывной функции в нуль и о промежуточных значениях непрерывной функции.

46. Теорема о непрерывности обратной функции.

47. Понятие дифференцируемой функции и производной функции в точке. Примеры. Производные базисных элементарных функций

48. Односторонние производные. Примеры. Условия дифференцируемости в терминах односторонних производных.

49. Условие дифференцируемости функции в точке в терминах приращения. Дифференциал.

50. Дифференцируемость композиции дифференцируемых функций.

51. Дифференцируемость и арифметические операции. Производные

52. Дифференцируемость обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций

53. Геометрический смысл производной.

54. Односторонние полукасательные. Условие дифференцируемости в терминах односторонних полукасательных. Геометрическая интерпретация.

55. Понятие экстремума функции. Теорема Ферма.

56. Теорема Ролля.

57. Теоремы Лагранжа и Коши о конечных приращениях.

58. Необходимые и достаточные условия экстремума.

59. Правила Лопиталя.

60. Производные высших порядков.

61. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме.

62. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши.

63. Формула Тейлора для функций $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$

с остаточным членом в форме Лагранжа. Сходимость остаточного члена.

64. Формула Тейлора для функций $f(x)=\ln(1+x),\quad f(x)=(1+x)^{\alpha}$ с остаточным членом в форме Коши. Сходимость остаточного члена.

65. Локальная формула Тейлора. Локальная формула Тейлора для базисных элементарных функций.

66. Достаточные условия экстремума в терминах высших производных.

67. Понятия выпуклой и вогнутой функции. Геометрическая интерпретация. Непрерывность и односторонняя дифференцируемость выпуклой и вогнутой функции.

68. Условия выпуклости и вогнутости функции в терминах первой и второй производной.

69. Условия выпуклости и вогнутости функции в терминах полукасательных и касательных. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия.

2 семестр (экзамен)

1. Понятие интеграла Римана. Примеры интегрируемой и неинтегрируемой по Риману функции.
2. Критерий интегрируемости в терминах частных сумм. Критерий Лебега интегрируемости функции.
3. Интегрируемость монотонной, кусочно-монотонной, непрерывной и кусочно-непрерывной функции.
4. Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функции. Интегрируемость модуля интегрируемой функции и произведения интегрируемых функций.
5. Свойства линейности и аддитивности интеграла Римана.
6. Свойство монотонности интеграла Римана. Оценка модуля интеграла.
7. Независимость интеграла от значений функции в конечном числе точек.
8. Теорема о существовании первообразной.
9. Понятие первообразной. Структура множества первообразных непрерывной и кусочно-непрерывной функции.
10. Формула Ньютона – Лейбница.
11. Понятие неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Свойство линейности неопределенного интеграла.
12. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Примеры.
13. Замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.
14. Интегрирование рациональных функций.
15. Интегрирование иррациональных функций.
16. Интегрирование тригонометрических функций.
17. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Примеры.
18. Первая теорема о среднем значении для интеграла Римана и следствия из нее.
19. Вторая теорема о среднем значении для интеграла Римана.

20. Понятие кривой. Вычисление длины кривой.

21. Вычисление площади криволинейной трапеции и объема тела вращения.

22. Несобственного интеграла. Основные свойства. Интегралы: $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, $\int\limits_0^b \frac{1}{x^p} dx$.,.

23. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

24. Признаки сравнения сходимости несобственных интегралов. Примеры

25. Абсолютная сходимость несобственных интегралов. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

26. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов. Примеры.

27. Несобственные интегралы с несколькими особенностями. Примеры.

28. Понятие числового ряда и сходимости ряда. Примеры. Гармонический ряд.

29. Необходимое условие сходимости числового ряда. Сходимость остатка ряда.

30. Критерий Коши сходимости числового ряда. Абсолютная сходимость.

31. Лемма Коши о разрежении ряда. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

32. Признаки сравнения сходимости положительного числового ряда.

33. Признаки Даламбера и Коши сходимости положительного ряда. Примеры.

34. Интегральный признак сходимости положительного ряда

35. Абсолютная сходимость ряда. Признаки Абеля и Дирихле сходимости ряда с произвольными членами. Признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда.

36. Умножение рядов.

37. Группировка членов ряда. Перестановка членов ряда. Теорема Римана.

38. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. Сходимость функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры.

39. Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры. Признак равномерной сходимости функциональной последовательности.

40. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.

41. Непрерывность предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности. Непрерывность суммы равномерно сходящегося функционального ряда.

42. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема о почленном интегрировании функционального ряда

43. Теоремы о почленном дифференцировании функциональной последовательности и функционального ряда.
44. Понятие степенного ряда. Теорема Коши–Адамара. Радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости степенного ряда.
45. Теорема Абеля о равномерной сходимости степенного ряда.
46. Непрерывность суммы степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
47. Теорема об отыскание коэффициентов степенного ряда по его сумме.
48. Ряд Тейлора. Условие сходимости ряда Тейлора. Разложение в ряд Тейлора базисных элементарных функций. Понятие тригонометрического ряда. Вычисление коэффициентов равномерно сходящегося тригонометрического ряда.
49. Понятие ряда Фурье. Коэффициенты Фурье. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье.
50. Неравенство Бесселя. Сходимость к нулю коэффициентов Фурье.
51. Ядро Дирихле. Свойства. Интегральное представление частных сумм ряда Фурье.
52. Принцип локализации.
53. Признаки Дирихле сходимости ряда Фурье в точке.
54. Суммы Фейера. Равномерная сходимость последовательности сумм Фейера непрерывной функции. Равенство Парсеваля
55. Интеграл Фурье. Признаки сходимости.
56. Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свертка.

3 семестр (зачёт)

1. Пространство R^n. Скалярное произведение. Неравенство Коши – Буняковского. Норма. Свойства нормы.
2. Открытые и замкнутые множества. Внутренность и замыкание множества. Предельные точки. Сходимость последовательности.
3. Понятие функции $f: R^m \to R^n$. График функции $f: R^2 \to R$. Примеры. Проекция. Представление функции $f: R^m \to R^n$ с помощью координатных функций.
4. Предел и непрерывность функции $f: R^m \to R^n$. Эквивалентные определения. Примеры.
5. Свойства непрерывных функций. Непрерывность композиции.
6. Непрерывность функции $f: R^m \to R^n$ в случае непрерывности координатных функций.
7. Теорема Вейерштрасса.
8. Непрерывность по фиксированной переменной и по подпространству.
9. Понятие дифференцируемой функции $f: R^m \to R$. Градиент. Дифференциал. Единственность градиента. Примеры.

10. Условие дифференцируемости в терминах приращений. Непрерывность дифференцируемой функции.
11. Частные производные функции. Правило вычисления. Примеры.
12. Теорема о структуре градиента. Пример функции, имеющей в точке все частные производные, но не дифференцируемой в этой точке.
13. Теорема о дифференцируемости функции в случае непрерывности частных производных.
14. Дифференцирование сложной функции.
15. Геометрическая интерпретация градиента. Касательная плоскость и нормаль.
16. Производная по направлению.
17. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Примеры. Формальная запись дифференциалов высших порядков.
18. Формула Тейлора.
19. Локальный экстремум функции $f: R^m \to R$. Примеры. Необходимые условия экстремума.
20. Достаточные условия экстремума для функции $f: R^m \to R$ и $f: R^2 \to R$.
21. Понятие дифференцируемой функции $f: R^m \to R^n$. Оператор – производная. Примеры. Условие дифференцируемости в терминах приращений. Непрерывность дифференцируемой функции.
22. Теорема о структуре матрицы оператора производной.
23. Дифференцируемость функции $f: R^m \to R^n$ в случае непрерывности частных производных координатных функций.
24. Дифференцируемость композиции.
25. Теоремы о конечных приращениях.
26. Непрерывно дифференцируемые функции $f: R^m \to R^n$. Условия непрерывной дифференцируемости.
27. Теорема об обратной функции.
28. Понятие неявной функции. Примеры. Теорема о неявной функции.
29. Правило дифференцирования неявных функций. Теорема о системе неявных функций.
30. Понятие условного экстремума. Примеры.
31. Необходимые условия условного экстремума.
32. Функция Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума.
33. Измеримые по Жордану множества. Мера Жордана. Примеры множеств не измеримых по Жордану. Критерий измеримости.
34. Понятие двойного интеграла. Критерий интегрируемости в терминах интегральных сумм.
35. Критерий Лебега интегрируемости многомерной функции. Интегрируемость непрерывной функции.
36. Свойства интеграла. Линейность. Монотонность. Аддитивность. Оценка модуля интеграла.
37. Теорема Фубини. Вычисление двойных интегралов.

38. Теорема о замене переменных в двойном интеграле.
39. Переход к полярным координатам в качестве замены переменных.
40. Тройные интегралы. Вычисление. Свойства.
41. Замена переменных в тройном интеграле. Переход к сферическим и цилиндрическим координатам.
42. Многомерные интегралы
43. Естественная параметризация кривой. Ориентация кривой.
44. Понятие криволинейного интеграла 1-го рода. Свойства. Вычисление сведением к определенному интегралу.
45. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода и определенным интегралом.
46. Формула Грина.
47. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.
48. Приложения криволинейных интегралов.
49. Понятие поверхности. Криволинейные координаты на поверхности. Кривые на поверхности. Касательная и нормаль к поверхности. Первая квадратичная Форма поверхности.
50. Двухсторонние поверхности. Ориентация поверхности. Ориентация замкнутой кривой на поверхности. Площадь поверхности.
51. Интегралы первого рода по поверхности. Свойства. Вычисление сведением к двойному интегралу.
52. Интегралы второго рода по поверхности. Свойства. Связь с интегралом первого рода. Вычисление сведением к двойному интегралу.
53. Формула Стокса. Формула Остроградского – Гаусса.
54. Понятие собственного интеграла с параметром. Непрерывность по параметру.
55. Интегрирование и дифференцирование собственного интеграла с параметром.
56. Понятие несобственного интеграла с параметром. Равномерная сходимость по параметру. Условие равномерной сходимости в терминах функциональной последовательности.
57. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла с параметром.
58. Признак Абеля – Дирихле равномерной сходимости интеграла с параметром.
59. Непрерывность несобственного интеграла с параметром по параметру. Интегрирование и дифференцирование несобственного интеграла с параметром
60. Равномерная сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{\sin \alpha t}{t} dt$ по параметрам α и β.

Вычисление интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt$.
61. Гамма – функция Эйлера. Область определения гамма – функции.

Непрерывность и дифференцируемость гамма – функции.

62. Основное функциональное соотношение для гамма – функции и следствия из него.
63. Бета – функция Эйлера. Связь с гамма функцией.
64. Следствия из формулы связи бета и гамма–функций.
65. Формула дополнений и следствия из нее.
66. Вычисление определенных интегралов с помощью гамма и бета– функций. Интеграл Пуассона.
67. Асимптотическое поведение гамма–функции. Формула Стирлинга.

4 семестр (экзамен)

1. Поле комплексных чисел. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Геометрические свойства комплексных чисел.
2. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость. Сходящиеся последовательности в **C** и $\overline{C}$. Лемма о покоординатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса.
3. Евклидова и сферическая метрики. Топологии в C и $\overline{C}$ (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).
4. Функции комплексного переменного (ф.к.п.). Непрерывность, ограниченность ф.к.п. Теоремы о непрерывных ф.к.п. на компакте, в области.
5. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах. Критерии моногенности и голоморфности ф.к.п. в точке. Связь голоморфных и гармонических функций.
6. Аффинные преобразования. Целые линейные преобразования. Декомпозиция целой линейной функции,
7. Касательное отображение. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Определения конформного отображения 1-го и 2-го рода. Якобиан конформного отображения.
8. Дробно-линейные и мёбиусовы преобразования, их свойства: глобальная однолистность и конформность, групповое свойство. Декомпозиция дробно-линейных преобразований.
9. Круговое свойство мёбиусовых преобразований, сохранение симметрии точек и ангармонического отношения четвёрок точек.
10. Существование и единственность мёбиусова преобразования, нормированного соответствием трёх пар точек. Вычисление групп мёбиусовых автоморфизмов единичного круга и верхней полуплоскости. Понятие о модели Пуанкаре геометрии Лобачевского.
11. Степенная функция с натуральным показателем, области её однолистности и конформности, глобальное обращение. Риманова поверхность и ветви

радикала. Характер отображения в окрестности начала координат и в окрестности бесконечно удалённой точки.

12. Определение экспоненты, её аналитические и геометрические свойства: голоморфность на **C**, теорема сложения, необращение в нуль, периодичность, локальная однолистность, конформность. Области однолистности экспоненты. Глобальное обращение, построение римановой поверхности логарифмической функции. Ветви логарифмической функции, геометрические свойства логарифма.

13. Функция Жуковского. Области её однолистности и конформности. Конформные отображения круга и верхней полуплоскости функцией Жуковского. Построение римановой поверхности функции, обратной к функции Жуковского.

14. Формулировки теоремы Римана о конформных отображениях, основные принципы конформных отображений. Принцип симметрии Римана-Шварца. Пример применения принципа симметрии к построению конформного отображения.

15. Криволинейные интегралы от ф.к.п., их свойства, вычисление. Примеры вычисления интегралов от ф.к.п.

16. Интегральная теорема Коши-Гурса и её обобщение на многосвязные области (с доказательствами).

17. Интегральная формула Коши. Доказательство, обобщение на случай многосвязных областей, следствия.

18. Неопределённый интеграл от ф.к.п. в плоской области и формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.

19. Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.

20. Поточечная, равномерная, локально-равномерная сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных рядов. Теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.

21. Теорема Абеля о степенных рядах. Существование радиуса сходимости и методы его вычисления. Формула Коши-Адамара. Локально-равномерная сходимость, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.

22. Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Голоморфность суммы степенного ряда. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.

23. Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы.

24. Ряды Лорана, структура области сходимости. Доказательство теоремы

Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

25. Внутренняя теорема единственности (доказательство). Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.

26. Изолированные особые точки голоморфной функции, их классификация. Критерии у.о.т. и полюса. Нахождение порядка полюса. Примеры.

27. Критерий с.о.т. Теорема Сохоцкого о поведении голоморфной функции в проколотой окрестности её с.о.т.

28. Бесконечность как и.о.т. голоморфной функции. Классификация и критерии и.о.т. на бесконечности.

29. Определение вычета в и.о.т. и формулы для вычисления вычетов. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычета на бесконечности. Теорема о сумме всех вычетов.

30. Принцип аргумента, его геометрический смысл.

31. Теорема Руше. Приложения теоремы Руше к полиномам.

32. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций. Лемма Жордана и её применения.

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) Основная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник / 10-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2018. - 680 с. - ISBN 978-5-9221-1802. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1223543
2. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного учебник для вузов / М.: Изд-во Юрайт, 2023. — 402 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01450-1. — Текст : электронный // — URL: https://urait.ru/bcode/512097 (дата обращения: 26.08.2024).

б) Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления /Г.М. Фихтенгольц**.** - Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). - Москва : Физматлит, 2002. - 727 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=409
2. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу : учебник для студентов вузов, обучающихся по направлениям и специальностям физико-математического профиля / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. - Изд. 4-е, испр. - Москва: Дрофа, 2004. - 638, [1] с. - (Высшее образование) (Современный учебник). - Библиогр.: с. 626-627 (37 назв.).

http://texts.lib.tversu.ru/texts/1000539ogl.pdf
3. Голубев А. А. Введение в анализ : учебное пособие / А. А. Голубев, В. Ю. Суетин ; Федер. агентство по образованию, ГОУ ВПО "Твер. гос. ун-т". - Тверь : Тверской государственный университет, 2007. - 158 с. : ил. - Библиогр.: с. 155 (7 назв.). http://texts.lib.tversu.ru/texts/01626ogl.pdf
4. Голубев А.А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного действительного переменного : учебное пособие / А. А. Голубев ; М-во образования РФ, ФГБОУ ВПО "Твер. гос. ун-т". - Тверь : Тверской государственный университет, 2015. - 158 с. : ил., табл. - Библиогр.: с. 155 (14 назв.). http://texts.lib.tversu.ru/texts/09885ucheb.pdf
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. - Москва : АСТ : Астрель, 2010. - 558 с. : ил. http://texts.lib.tversu.ru/texts/1000536ogl.pdf

VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Cloud of science
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2374
Juvenis scientia
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2633
Vojnotehnicki glasnik / Military Technical Courier / Военно-технический вестник
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2490
Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2495
Вестник Мордовского университета
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2234
Вестник Омского университета
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2586
Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2464
Вестник Псковского государственного университета. Серия Естественные и физико-математические науки
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2304
Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия: Естественные науки
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2344
Вестник Таджикского национального университета. Серия Естественных Наук / Паёми Донишгоњи миллии тољикистон. Бахши Илмњои Табиї
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2429

Вестник Тамбовского государственного технического университета
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2260
Вестник Челябинского государственного университета
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2221
Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2544
Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2547
Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2548
Известия высших учебных заведений. Арктический регион
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2640
Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2435
Известия ТулГУ. Естественные науки
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2223
Квант
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2372
Квантик
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2409
Университетский научный журнал
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2585
Труды БГТУ. №6. Физико-математические науки и информатика
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2487
Сибирский журнал вычислительной математики
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2169
Приложение математики в экономических и технических исследованиях
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2395
Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2150
Певзнеровские чтения
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2460
Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2191
Наука и техника
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2418
Математические структуры и моделирование
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2592

Математика в высшем образовании
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2368
Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2601
ҚазҰТУ Хабаршысы / Вестник Казахского национального технического университета им. К.И. Сатпаева
http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2565

VI. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

Во-первых, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

Во-вторых, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

1. Работа с учебными пособиями. Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

2. Самостоятельное изучение тем. Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту и экзамену.

3. Подготовка к практическим занятиям. При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

4. Составление конспектов. В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

5. Подготовка к зачету/экзамену. При подготовке к зачету/экзамену студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе лекций.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся <u>зачётом</u>, составляет 100 баллов. Студенту, набравшему 50 баллов и выше по итогам работы в семестре, в экзаменационной ведомости и зачётной книжке выставляется оценка «зачтено».

Студент, набравший от 20 до 49 баллов включительно, сдаёт зачёт в последнюю неделю семестра по данной дисциплине. Баллы, полученные на зачёте, проставляются в ведомости.

Студенту, набравшему меньше 20 баллов, в экзаменационной ведомости выставляется оценка «незачтено». Данному студенту разрешается пересдача зачёта по направлению деканата на последней неделе семестра.

Максимальная сумма рейтинговых баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся <u>экзаменом</u>, по итогам семестра составляет 60.

Студенту, набравшему 50-54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в экзаменационной ведомости и зачётной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Студенту, набравшему 55-60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе экзаменационной ведомости «Премиальные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается. Оценку «отлично» студент может получить только на экзамене.

Студент, набравший от 20 до 49 баллов включительно, сдаёт экзамен.

Студенту, набравшему меньше 20 баллов, в экзаменационной ведомости выставляется оценка «неудовлетворительно».

Ответ студента на экзамене оценивается суммой до 40 рейтинговых баллов. Итоговая оценка складывается из суммы баллов, полученных за семестр, и баллов, полученных на экзамене.

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины (модуля) установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.
- Сроки проведения рейтингового контроля:

осенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

весенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости -

две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

VII. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Учебный процесс по данной дисциплине проводится в аудиториях, оснащенных мультимедийными средствами обучения.

Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	**Оснащенность помещений**	**Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа**
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 207 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)	Набор учебной мебели, меловая доска, Переносной ноутбук, Интерактивная система Smart Board 660iv со встроенным проектором	Google Chrome – бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022.

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№п. п.	**Обновленный раздел рабочей программы дисциплины (или модуля)**	**Описание внесенных изменений**	**Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения**
1.	Разделы I,III,IV,V.	Обновление компетенций, содержания, ФОС, списка литературы	18.10.2017 г, протокол № 2
2.			