

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 10.06.2025 17:32:48  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2e1d1b575f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП

С.М. Дудаков

2023 \_\_ г.



Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Направление подготовки

15.03.06 МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИКА

Профиль подготовки

Интеллектуальное управление в мехатронных и робототехнических  
системах

Для студентов 2, 3-го курса

Формы обучения - очная

Составитель: к.ф.-м.н., доцент И.В. Захарова

Тверь, 2023

## **I. Аннотация**

### **1. Цель и задачи дисциплины**

Аксиоматика теории вероятностей, случайные величины, их распределения и числовые характеристики, предельные теоремы теории вероятностей, точечное и интервальное оценивание, проверка статистических гипотез, линейные статистические модели.

**Целью** освоения дисциплины является изложение основных сведений о построении и анализе моделей, учитывающих случайные факторы.

Задачами освоения дисциплины являются:

- освоение фундаментальных понятий теории вероятностей и математической статистики;
- овладение основными методами постановки и решения вероятностных задач;
- овладение основными методами постановки и решения статистических задач.

### **2. Место дисциплины в структуре ООП**

Данная дисциплина относится к разделу «Математический» обязательной части Блока 1. Для успешного усвоения курса необходимы знания основных понятий из математического анализа, линейной алгебры и обыкновенных дифференциальных уравнений, а также навыки решения основных задач, рассматриваемых в этих дисциплинах. Полученные знания используются в последующем при изучении дисциплин «Теория неопределенностей и нечеткая логика».

**3. Объем дисциплины:** 9 зачетных единиц, 324 академических часа, **в том числе:**

**контактная аудиторная работа:** лекции 62 часа, в т. ч. практическая подготовка 10 часов, практические занятия 62 часа, в т. ч. практическая подготовка 12 часов;

**контактная внеаудиторная работа:** контроль самостоятельной работы 20, в том числе курсовая работа 10 часов, расчетно-графическая работа 10 часов;

**самостоятельная работа:** 180 часов, в том числе контроль 63 часа.

**4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

| Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)                                                                          | Планируемые результаты обучения по дисциплине                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</p>                   | <p>УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</p> <p>УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие</p> <p>УК-1.2 Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи</p> <p>УК-1.3 Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов</p> <p>УК-1.4 При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения</p> <p>УК-1.5 Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки</p> |
| <p>ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общетеchnические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности</p> | <p>ОПК-1.1 Демонстрирует знания основ математики, физики, вычислительной техники и программирования</p> <p>ОПК-1.2 Демонстрирует навыки использования знаний физики и математики для решения задач теоретического и прикладного характера</p> <p>ОПК-1.3 Применяет методы математического и компьютерного моделирования, средства автоматизированного проектирования в теоретических и расчетно-экспериментальных исследованиях</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p>ПК-1 Способен участвовать в качестве исполнителя в научно-</p>                                                                                            | <p>ПК-1.1 Разрабатывает математические модели мехатронных и</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

|                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>исследовательских разработках новых робототехнических и мехатронных систем</p> | <p>робототехнических систем, их подсистем и отдельных элементов и модулей</p> <p>ПК-1.2 Разрабатывает экспериментальные макеты управляющих, информационных и исполнительных модулей мехатронных и робототехнических систем и проводит их экспериментальное исследование с применением современных информационных технологий</p> <p>ПК-1.4 Проводит эксперименты на действующих макетах, образцах мехатронных и робототехнических систем по заданным методикам и обрабатывает результаты с применением современных информационных технологий и технических средств</p> <p>ПК-1.5 Проводит вычислительные эксперименты с использованием стандартных программных пакетов с целью исследования математических моделей мехатронных и робототехнических систем</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## **5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения**

**4 семестр – экзамен, РГР; 5 семестр – экзамен, курсовая работа.**

## **6. Язык преподавания русский.**

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

| Учебная программа –<br>наименование разделов и<br>тем                                                                                                                                                                                                                                             | Всего<br>(час.) | Контактная работа (час.) |                                                  |                         |                                                  | Контроль<br>самостоятельно<br>й<br>работы<br>(в том<br>числе<br>курсовая<br>работа,<br>РГР) | Самостоятель<br>ная<br>работа,<br>в том<br>числе<br>Контроль<br>(час.) |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                 | Лекции                   |                                                  | Практические<br>занятия |                                                  |                                                                                             |                                                                        |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                 | всего                    | в т.ч.<br>практ<br>ическ<br>ая<br>подго<br>товка | всего                   | в т.ч.<br>практ<br>ическ<br>ая<br>подго<br>товка |                                                                                             |                                                                        |
| Семестр 4                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                 |                          |                                                  |                         |                                                  |                                                                                             |                                                                        |
| Дискретное вероятностное пространство.<br>События и операции над ними.<br>Вероятности событий и их свойства. Условная вероятность. Независимость событий. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.<br>Предельные теоремы для биномиального распределения. | 26              | 8                        |                                                  | 8                       |                                                  |                                                                                             | 10                                                                     |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |   |  |   |  |  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---|--|---|--|--|----|
| <b>Определение вероятностного пространства в общем случае.</b><br>Случайная величина и ее распределение.<br>Классификация распределений.<br>Функциональные преобразования случайных величин.<br>Случайный вектор и его распределение.<br>Классификация распределений.<br>Функциональные преобразования случайных векторов. Формула свертки.<br>Независимые случайные величины. | 20 | 6 |  | 2 |  |  | 12 |
| <b>Случайные величины и векторы.</b><br>Случайная величина и ее распределение.<br>Классификация распределений.<br>Функциональные преобразования случайных величин.<br>Случайный вектор и его распределение.<br>Классификация распределений.<br>Функциональные преобразования случайных векторов. Формула свертки.<br>Независимые случайные величины.                           | 28 | 6 |  | 8 |  |  | 14 |
| <b>Числовые характеристики случайных величин и векторов.</b><br>Математическое ожидание и дисперсия случайной величины и их свойства.<br>Ковариация, коэффициент корреляции и их свойства.                                                                                                                                                                                     | 24 | 6 |  | 8 |  |  | 10 |

|                                                                                                                                                              |     |    |   |    |   |    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|----|---|----|---|----|----|
| <b>Гильбертово пространство.</b> Сходимость в среднем квадратическом. Постановка задачи о наилучшей линейной оценке. Лемма о перпендикуляре.                 | 10  | 2  |   | 0  |   |    | 8  |
| <b>Условное распределение и условное математическое ожидание.</b> Свойства условного распределения и условного математического ожидания. Функция регрессии.  | 14  | 2  |   | 4  |   |    | 8  |
| <b>Многомерное нормальное распределение.</b> Свойства многомерного нормального распределения. Смысл параметров.                                              | 12  | 2  |   | 2  |   |    | 8  |
| <b>Итого: 4 семестр</b>                                                                                                                                      | 144 | 32 | 5 | 32 | 6 | 10 | 70 |
| <b>Семестр 5</b>                                                                                                                                             |     |    |   |    |   |    |    |
| <b>Предельные теоремы.</b> Закон больших чисел. Характеристические и производящие функции. ЦПТ для независимых и одинаково распределенных случайных величин. | 28  | 6  |   | 4  |   |    | 18 |
| <b>Цепи Маркова.</b> Основные понятия, классификация состояний, предельные теоремы.                                                                          | 20  | 0  |   | 4  |   |    | 16 |
| <b>Статистическая структура.</b> Примеры статистических структур.                                                                                            | 16  | 2  |   | 2  |   |    | 12 |
| <b>Точечные оценки параметров.</b> Свойства оценок: несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность. Методы построения оценок параметров.       | 26  | 6  |   | 2  |   |    | 18 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |    |    |    |    |    |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|----|----|----|----|----|-----|
| <b>Интервальные оценки параметров.</b><br>Доверительные интервалы. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения. Построение доверительных интервалов с помощью центральных статистик и асимптотически нормальных оценок.                                | 30  | 6  |    | 6  |    |    | 18  |
| <b>Критерии согласия.</b><br>Критерий Колмогорова и Хи-квадрат критерий Пирсона.                                                                                                                                                                                                        | 28  | 4  | 4  | 6  | 6  |    | 8   |
| <b>Проверка статистических гипотез.</b><br>Критерий, критическая зона, статистика критерия, критическая константа. Ошибки первого и второго рода, уровень значимости и мощность критерия, равномерно наиболее мощный критерий. Лемма Неймана-Пирсона. Критерий отношения правдоподобия. | 44  | 6  | 6  | 6  | 6  |    | 20  |
| <b>Курсовая работа</b>                                                                                                                                                                                                                                                                  |     |    |    |    |    | 10 |     |
| <b>Итого: 5 семестр</b>                                                                                                                                                                                                                                                                 | 180 | 30 | 5  | 30 | 6  | 10 | 110 |
| <b>ИТОГО</b>                                                                                                                                                                                                                                                                            | 324 | 62 | 10 | 62 | 12 | 20 | 180 |

### III. Образовательные технологии

| Учебная программа –<br>наименование разделов и<br>тем <i>(в строгом<br/>соответствии с разделом<br/>II РПД)</i> | Вид занятия                        | Образовательные<br>технологии                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Дискретное вероятностное пространство.                                                                          | Лекции,<br>практические<br>занятия | Изложение<br>теоретического<br>материала, решение задач |

|                                                            |                              |                                                   |
|------------------------------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------------------|
| Определение вероятностного пространства в общем случае.    | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |
| Случайные величины и векторы.                              | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |
| Числовые характеристики случайных величин и векторов.      | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |
| Гильбертово пространство.                                  | Лекции                       | Изложение теоретического материала                |
| Условное распределение и условное математическое ожидание. | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |
| Многомерное нормальное распределение.                      | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |
| Предельные теоремы.                                        | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |
| Цепи Маркова.                                              | Практические занятия         | Решение задач                                     |
| Статистическая структура.                                  | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |
| Точечные оценки параметров.                                | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |
| Интервальные оценки параметров.                            | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |
| Критерии согласия.                                         | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |
| Проверка статистических гипотез.                           | Лекции, практические занятия | Изложение теоретического материала, решение задач |

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: традиционные лекции, практические занятия в диалоговом режиме, выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

Дисциплина предусматривает выполнение курсовой и расчетно-графической контрольных работ, письменных домашних заданий.

#### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

##### **ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности**

ОПК-1.1 Демонстрирует знания основ математики, физики, вычислительной техники и программирования

ОПК-1.2 Демонстрирует навыки использования знаний физики и математики для решения задач теоретического и прикладного характера

ОПК-1.3 Применяет методы математического и компьютерного моделирования, средства автоматизированного проектирования в теоретических и расчетно-экспериментальных исследованиях

1. Что такое цепь Маркова, свойство однородности, матрица перехода. Стационарные цепи Маркова.

Ресторан под открытым небом работает только в погожие дни. Если в данной местности сегодня идет дождь, то с вероятностью 0.4 он будет и завтра. Если сегодня дождя нет, то завтра он будет с вероятностью 0.1. Описать эту ситуацию с помощью однородной цепи Маркова, построить матрицу перехода за один шаг. Найти стационарное распределение цепи. Сегодня ресторан закрыт. Найти вероятность того, что он будет закрыт еще два дня.

- Имеется полное верное аргументированное решение, включающее правильный ответ – 8 баллов.
- Допущены незначительные ошибки, не искажающие сути решения – 6 баллов.
- Функционирование системы описано верно, приведено подробное описание, но содержит ошибки - 4 балла.

Дано только описание системы – 2 балла.

- Решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.

2. Что такое центральная статистика? Как построить доверительный интервал с помощью центральной статистики?

Пусть  $X = (X_1)$  есть выборка объема  $N = 1$  из показательного распределения с параметром  $\ln(\lambda)$ . Доказать, что случайная величина  $T(X, \theta) = X_1 * \ln(\lambda)$  есть центральная статистика и построить с ее помощью доверительный интервал для параметра  $\lambda$ .

- Задача решена в полном объеме – 6 баллов;
- Приведено полное верное доказательство - 3 балла;
- Допущены фактические и логические ошибки, свидетельствующие о непонимании темы – 0 баллов.

**УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач**

УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие

УК-1.2 Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи

УК-1.3 Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов

УК-1.4 При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения

УК-1.5 Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки

**ПК-1 Способен участвовать в качестве исполнителя в научно-исследовательских разработках новых робототехнических и мехатронных систем**

ПК-1.1 Разрабатывает математические модели мехатронных и робототехнических систем, их подсистем и отдельных элементов и модулей

ПК-1.2 Разрабатывает экспериментальные макеты управляющих, информационных и исполнительных модулей мехатронных и робототехнических систем и проводит их экспериментальное исследование с применением современных информационных технологий

ПК-1.4 Проводит эксперименты на действующих макетах, образцах мехатронных и робототехнических систем по заданным методикам и обрабатывает результаты с применением современных информационных технологий и технических средств

ПК-1.5 Проводит вычислительные эксперименты с использованием стандартных программных пакетов с целью исследования математических моделей мехатронных и робототехнических систем

1. Метод статистического моделирования (метод Монте-Карло) – область применения; задачи, решаемые с помощью этого метода.

*Написать программу, вычисляющую площадь заданной фигуры.*

На входе: число наблюдений, дополнительные параметры (если они есть).

На выходе: площадь фигуры и относительная погрешность.

Пример: Написать программу, вычисляющую площадь ромба с диагоналями  $a$  и  $b$

По результатам выполнения работы должен быть написан отчет, содержащий:

- описание метода статистического моделирования (метод Монте-Карло);
- постановку решаемой задачи;
- текст программы;
- тестовые примеры (число испытаний  $k = 1000, k = 10^4, k = 10^5, k = 10^6$ ).

Итого: 20 баллов.

-Приведен только текст правильной программы (без комментариев) – 10 баллов;

-Работа не содержит тестовых примеров, но выполнена в остальном полностью и правильно – 15 баллов.

#### **Примерные задачи для экзамена (семестр 4):**

1. Используя свойства событий и вероятности, доказать (формально), что
$$P(\overline{A \cup B}) + P(\overline{A} \cap B) = 1 + 2 \cdot P(AB) - P(B)$$
2. Точка  $(a, b)$  наудачу выбирается из квадрата с вершинами  $[-1, -1]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[1, -1]$  и  $[1, 1]$ . Найти вероятность того, что все корни уравнения  $x^2 + ax + b = 0$  действительные.
3. По школьному расписанию в понедельник должно быть 6 занятий: алгебра, геометрия, история, физика, география и литература. Какова вероятность того, что 3 дисциплины – алгебра, геометрия и физика не следуют друг за другом непосредственно.
4. Случайно выбирают одну из 2-х костей. Одна кость “правильная”, а на гранях другой стоят цифры 1, 2, 3, (одинаковые цифры на противоположных гранях). Выбранную кость бросили 2 раза и оба раза получили единицы. Какова вероятность того, что это “правильная” кость?
5. В некотором поселке 2500 жителей, каждый из которых раз в месяц (30 дней) ездит в город на поезде, выбирая дни поездок случайным образом независимо от других. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней?
6. Вероятность поражения цели равна  $2/5$ . По цели производится 8 независимых выстрелов. Какова вероятность того, что будет не менее 2-х попаданий. Оценить наиболее вероятное число попаданий в цель при этих условиях и найти соответствующую вероятность.

7. Двумерный случайный вектор  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  имеет дискретное распределение следующего вида

| $\xi_1 \setminus \xi_2$ | 1   | 2   |
|-------------------------|-----|-----|
| 1                       | 0,4 | 0,3 |
| 2                       | 0,1 | 0,2 |

Найти:

- 1) Распределения случайных величин  $\eta_1 = \xi_1 / \xi_2$  и  $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$ ;
  - 2) Восстановить совместное распределение случайных величин  $\eta_1$  и  $\eta_2$
  - 3) Проверить случайные величины  $\eta_1$  и  $\eta_2$  на независимость;
  - 4) Математическое ожидание случайной величины  $\theta = \eta_2 - 2\eta_1$ .
8. Двумерный случайный вектор  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  имеет непрерывное распределение с плотностью

$$\rho_{\xi}(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции  $\rho(\xi_1, \xi_2)$  случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

### Примерные задачи для экзамена (семестр 5):

1. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины  $(X, Y)$  имеет вид

| $X \setminus Y$ | -2   | -1  | 1    |
|-----------------|------|-----|------|
| -1              | 0,25 | 0,2 | 0,1  |
| 0               | 0,1  | 0,2 | 0,15 |

Найти: коэффициент корреляции  $\rho(X, Y)$  случайных величин  $X$  и  $Y$ .

2. Для данных из п.1. найти распределение сл. вел.  $Z = X * Y$ . Найти квантиль порядка  $p = 0.8$  для случайной величины  $Z$ .

3. Случайная величина  $\xi$  имеет показательное распределение с параметром  $\lambda = 2$ . Найти характеристическую функцию случайной величины  $\theta = 1 + 2\xi$ . Найти с ее помощью  $M(\xi)$ .

4. Предлагается страховка от несчастного случая, по которой будут выплачивать 1000 ед. с вероятностью 0,2 и ничего с вероятностью 0,8. Сейчас такая страховка стоит 10 ед. Продано 1000 полисов. Найти вероятность безубыточной деятельности компании при таких условиях.

5. Некто стреляет по мишени. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,5. При неудачном выстреле вероятность попадания снижается до 0,4,

а при удачном – возрастает до 0,6. Найти вероятность попадания при третьем выстреле и после длительной стрельбы по мишени.

6. Получена выборка объема  $N = 20$  из нормального распределения:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 8, | 8, | 7, | 7, | 7, | 6, | 8, | 7, | 7, | 6, | 5, | 5, | 7, | 6, | 8, | 7, | 7, | 7, | 8, | 8, |
| 5  | 9  | 5  | 5  | 1  | 2  | 9  | 4  | 4  | 2  | 6  | 6  | 1  | 2  | 5  | 1  | 8  | 8  | 0  | 0  |

Построить вариационный ряд выборки и гистограмму (взять 5 равных интервалов). Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочную медиану. Построить доверительный интервал уровня  $\gamma = 0,95$  для среднего при неизвестной дисперсии.

7.  $X = (X_1, \dots, X_N)$  – повторная выборка из распределения с плотностью

$$\rho_{\xi}(x) = \begin{cases} 2/\theta \cdot x e^{-x^2/\theta}, & x \in [0, \infty), \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{где } \theta > 0 - \text{неизвестный параметр}$$

распределения. Построить оценку для параметра  $\theta$  по методу наибольшего правдоподобия и проверить ее на несмещенность и состоятельность.

8. Предполагается, что случайная величина  $\xi$  принимает значения 1, 2 и 3 с вероятностями  $\theta$ ,  $\theta$ ,  $1-2\theta$  соответственно,  $0 < \theta < 1/2$ . Проведено 60 независимых измерений этой величины в одинаковых условиях. При этом 1 появилась 28 раз, 2 – 12 раз, 3 – 20 раз. Согласуются ли данные результаты с предполагаемым распределением.

9. Пусть  $X = (X_1)$  есть выборка объема  $N = 1$  из показательного распределения с параметром  $\ln(\lambda)$ . Доказать, что случайная величина  $T(X, \theta) = X_1 \cdot \ln(\lambda)$  есть центральная статистика и построить с ее помощью доверительный интервал для параметра  $\lambda$ .

10.  $X = (X_1, \dots, X_N)$  – повторная выборка генеральной совокупности с нормальным распределением. Проверяется гипотеза  $H_0: a = 1, \sigma^2 = 1$  против альтернативы  $H_1: a = 2, \sigma^2 = 1$ . Для проверки используется тест с критической областью  $K = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N): \sum_{i=1}^{25} x_i > c \right\}$ . При каком  $c$  тест имеет уровень  $\alpha = 0,1$

Вычислить мощность такого теста.

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1) Рекомендуемая литература

#### а) Основная литература

1. Балдин К. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453249>
2. Колемаев В. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник.- Екатеринбург, 2014. - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436721>

## б) Дополнительная литература

1. Горлач, Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учеб.-метод. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 320 с. — Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=4864](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=4864)
2. Буре, В.М. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учеб. / В.М. Буре, Е.М. Парилина. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 416 с. — Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=10249](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=10249)
3. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко; Ставропольский государственный аграрный университет. - Издание второе дополненное. - Ставрополь: Агрус, 2013. - 257 с.: схем., табл.; То же [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=277492>

## 2) Программное обеспечение

| <b>Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 46<br/>(170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)</b> |                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Adobe Acrobat Reader DC - Russian                                                                                                          | бесплатно                                                                                         |
| Apache Tomcat 8.0.27                                                                                                                       | бесплатно                                                                                         |
| Cadence SPB/OrCAD 16.6                                                                                                                     | Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009 |
| GlassFish Server Open Source Edition 4.1.1                                                                                                 | бесплатно                                                                                         |
| Google Chrome                                                                                                                              | бесплатно                                                                                         |
| Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit)                                                                                               | бесплатно                                                                                         |
| JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3                                                                                                  | бесплатно                                                                                         |
| JetBrains PyCharm Edu 3.0                                                                                                                  | бесплатно                                                                                         |
| Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows                                                                                                 | Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022                                                          |
| Lazarus 1.4.0                                                                                                                              | бесплатно                                                                                         |
| Mathcad 15 M010                                                                                                                            | Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011                                                  |
| MATLAB R2012b                                                                                                                              | Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012                                                  |
| Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО                                                                                      | бесплатно                                                                                         |
| ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО                                                                                                              | бесплатно                                                                                         |
| MiKTeX 2.9                                                                                                                                 | бесплатно                                                                                         |
| MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK                                                                                                               | бесплатно                                                                                         |

|                                         |                                                         |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| NetBeans IDE 8.0.2                      | бесплатно                                               |
| NetBeans IDE 8.2                        | бесплатно                                               |
| Notepad++                               | бесплатно                                               |
| Oracle VM VirtualBox 5.0.2              | бесплатно                                               |
| Origin 8.1 Sr2                          | договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд» |
| Python 3.1 pygame-1.9.1                 | бесплатно                                               |
| Python 3.4 numpy-1.9.2                  | бесплатно                                               |
| Python 3.4.3                            | бесплатно                                               |
| Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64-bit)   | бесплатно                                               |
| WCF RIA Services V1.0 SP2               | бесплатно                                               |
| WinDjView 2.1                           | бесплатно                                               |
| R Studio                                | бесплатно                                               |
| Anaconda3 2019.07 (Python 3.7.3 64-bit) | бесплатно                                               |

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com);
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>;
3. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>.

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Интернет-университет <http://www.intuit.ru>

## **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

### **Перечень вопросов, выносимых на экзамен: Часть 1**

1. Дискретное вероятностное пространство.
2. События и операции над ними.
3. Вероятности событий и их свойства.
4. Условная вероятность. Независимость событий.
5. Формулы полной вероятности и Байеса.
6. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.
7. Предельные теоремы для биномиального распределения.
8. Общее определение вероятностного пространства.
9. Случайная величина и ее распределение. Классификация распределений.
10. Функциональные преобразования случайных величин.
11. Случайный вектор и его распределение. Классификация распределений.
12. Функциональные преобразования случайных векторов. Формула свертки.

13. Независимые случайные величины.
14. Математическое ожидание дискретных случайных величин и его свойства.
15. Определение математического ожидания случайной величины в общем случае.
16. Свойства математических ожиданий.
17. Числовые характеристики случайных величин. Дисперсия и коэффициент корреляции.
18. Гильбертово пространство случайных величин. Задача о наилучшей оценке.

### **Дополнительные вопросы к экзамену (знать наизусть)**

1. Относительная частота появления события.
2. Статистическая устойчивость частот.
3. Определение дискретного вероятностного пространства.
4. Задача на классическое определение вероятности.
5. Определение события в дискретном вероятностном пространстве.
6. Благоприятный элементарный исход.
7. Что значит, что событие произошло (формально)?
8. Операции над событиями (формально и неформально):
  - a. достоверное и невозможное событие,
  - b. объединение,
  - c. пересечение,
  - d. несовместные события,
  - e. сумма,
  - f. противоположное,
  - g. разность,
  - h. одно событие влечет другое.
9. Алгебра событий.
10. Определение вероятности события.
11. Основные свойства вероятностей.
12. Геометрическое определение вероятности.
13. Размещения, перестановки, сочетания.
14. Условная вероятность.
15. Теорема умножения.
16. Независимость событий.
17. Полная группа событий.
18. Формула полной вероятности.
19. Формула Байеса.
20. Схема Бернулли (формально и неформально).

21. Биномиальное распределение.
22. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
23. Теорема Пуассона.
24. Определение вероятностного пространства в общем случае.
25. Порожденная алгебра.
26. Борелевская алгебра.
27. Определение случайной величины.
28. Распределение случайной величины.
29. Функция распределения и ее свойства.
30. Дискретное распределение и его свойства.
31. Непрерывное распределение и его свойства.
32. Примеры стандартных распределений:
  - биномиальное,
  - геометрическое,
  - Бернулли,
  - пуассоновское,
  - равномерное,
  - показательное,
  - нормальное.
32. Определение случайного вектора.
33. Распределение случайного вектора.
34. Дискретный случайный вектор, таблица его распределения, свойства дискретного распределения.
35. Случайный вектор с непрерывным распределением. Плотность распределения случайного вектора и ее свойства.
36. Маргинальные (одномерные) распределения и их вычисление.
37. Независимость случайных величин (в общем случае и для непрерывных с.в.).
38. Формула свертки в дискретном и непрерывном случае.
39. Математическое ожидание дискретной случайной величины.
40. Математическое ожидание непрерывной случайной величины.
41. Основные свойства математического ожидания.
42. Дисперсия и ее свойства.
43. Ковариация. Некоррелированные случайные величины.
44. Коэффициент корреляции и его свойства.
45. Определение момента случайной величины.
46. Квантиль порядка  $p$  для случайной величины. Медиана.
47. Сходимость в среднем квадратическом.

48. Постановка задачи о наилучшей линейной оценке.
49. Лемма о перпендикуляре.

### **Перечень вопросов, выносимых на экзамен: Часть 2**

1. Гильбертово пространство случайных величин.
2. Задача о наилучшей линейной оценке.
3. Условное распределение и условное математическое ожидание и их свойства.
4. Функция регрессии и ее экстремальное свойство.
5. Многомерное нормальное распределение.
6. Закон больших чисел.
7. Характеристические и производящие функции.
8. ЦПТ для независимых и одинаково распределенных случайных величин.
9. Цепи Маркова: основные понятия, классификация состояний, предельные теоремы.
10. Статистическая структура. Примеры параметрических структур.
11. Выборка, эмпирическое распределение, выборочные характеристики.
12. Оценки параметров и их свойства.
13. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия.
14. Неравенство Рао-Крамера и оптимальные оценки.
15. Интервальные оценки. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.
16. Построение доверительных интервалов с помощью центральных статистик и асимптотически нормальных оценок.
17. Критерий согласия. Критерий Колмогорова и Хи-квадрат критерий Пирсона.
18. Проверки гипотез об однородности и независимости.
19. Основные понятия проверки статистических гипотез. Лемма Неймана-Пирсона.
20. Проверка сложных гипотез. Критерий отношения правдоподобия.
21. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения.

### **Дополнительные вопросы к экзамену (знать наизусть)**

1. Гильбертово пространство случайных величин.
2. Сходимость в среднем квадратическом.
3. Задача о наилучшей линейной оценке.
4. Лемма о перпендикуляре.
5. Условное распределение и условное математическое ожидание в дискретном случае.

6. Условное распределение и условное математическое ожидание в непрерывном случае.
7. Условное распределение для двумерного нормального распределения.
8. Функция регрессии и ее экстремальное свойство.
9. Многомерное нормальное распределение: определение плотности и вероятностный смысл параметров.
10. Сходимость по вероятности.
11. Закон больших чисел.
12. Неравенство Чебышева.
13. Теорема Бернулли.
14. Определение характеристической функции и ее вычисление в дискретном и непрерывном случае.
15. Вычисление характеристической функции для линейного преобразования и суммы независимых случайных величин.
16. Теорема единственности.
17. Теорема непрерывности.
18. Характеристические функции для стандартных распределений:
  - биномиальное,
  - пуассоновское,
  - нормальное (общий случай и стандартное).
19. Слабая сходимость функций распределений.
20. Центральная предельная теорема.
21. Определение цепи Маркова.
22. Однородная цепь Маркова.
23. Начальное распределение цепи Маркова.
24. Вероятности перехода и их свойства.
25. Распределение цепи на шаге  $n$ .
26. Стационарное распределение.
27. Основная задача математической статистики.
28. Определение статистической структуры.
29. Параметрические и непараметрические структуры.
30. Примеры параметрических структур:
  - биномиальная,
  - пуассоновская,
  - показательная,
  - нормальная.
31. Выборка, повторная выборка.
32. Вариационный ряд, порядковые статистики.

33. Эмпирическое распределение, эмпирическая функция распределения, гистограмма.
34. Выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочные моменты.
35. Теорема о свойствах выборочных моментов.
36. Определение точечной оценки.
37. Свойства оценок:
  - несмещенность,
  - состоятельность,
  - оптимальность в среднем квадратическом,
  - асимптотическая нормальность.
38. Неравенство Рао-Крамера.
39. Определение хи-квадрат распределения, распределения Стьюдента, распределения Фишера-Снедекора.
40. Определение доверительного интервала. Точность и надежность интервальной оценки.
41. Гипотеза о согласии (однородности, независимости).
42. Основные понятия проверки статистических гипотез:
  - статистическая гипотеза,
  - простая и сложная гипотезы,
  - основная (нулевая) гипотеза и альтернатива,
  - критерий, критическая зона, статистика критерия, критическая константа,
  - ошибки первого и второго рода,
  - уровень значимости и мощность критерия,
  - равномерно наиболее мощный критерий,
  - лемма Неймана-Пирсона,
  - критерий отношения правдоподобия.

**Методические указания для выполнения  
курсовой работы (4 семестр)**

**Задание на работу**

**Варианты 1-7.** *Написать программу, рассчитывающую значение функции  $P(\xi \geq x)$ .*

На входе: число  $x$ , число наблюдений, дополнительные параметры (если они есть);

На выходе: значение функции  $P(\xi \geq x)$ .

Пример: Написать программу, рассчитывающую значение функции  $P(\xi \geq x)$ , где случайная величина  $\xi$  имеет  $\chi^2$  распределение с  $n$  степенями свободы.

**Варианты 8-15.** Написать программу, рассчитывающую значение интеграла

$$\int_a^b f(x)dx, \text{ где } f(x) - \text{ заданная плотность распределения.}$$

На входе: число наблюдений, дополнительные параметры (если они есть).

На выходе: значение интеграла  $\int_a^b f(x)dx$ .

Пример: Написать программу, рассчитывающую значение функции распределения логарифмически нормального закона,

$$F_{\xi}(z) = \int_0^z \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} dx$$

**Варианты 16-25.** Написать программу, вычисляющую площадь заданной фигуры.

На входе: число наблюдений, дополнительные параметры (если они есть).

На выходе: площадь фигуры и относительная погрешность.

Пример: Написать программу, вычисляющую площадь ромба с диагоналями  $a$  и  $b$

### **Требования к оформлению работы:**

По результатам выполнения работы должен быть написан отчет, содержащий

- описание метода статистического моделирования (метод Монте-Карло);
- постановку решаемой задачи;
- текст программы;
- тестовые примеры (число испытаний  $k = 1000, k = 10^4, k = 10^5, k = 10^6$ ).

## **Методические материалы для выполнения расчетно-графической работы по математической статистике**

### **Задание на работу**

1. Генерировать две повторные выборки с нормальным распределением.
2. Для первой выборки найти выборочное среднее, дисперсию, экстремальные значения, размах, выборочную медиану.
3. Построить для первой выборки график эмпирической функции распределения и гистограмму. Сгладить гистограмму с помощью нормальной плотности, оценив предварительно параметры.
4. Построить оценки параметров для нормального распределения по методу наибольшего правдоподобия.
5. Построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии.

6. По критерию  $\chi^2$  проверить согласие эмпирических данных с нормальным распределением.
7. Две выборки сгруппировать и проверить однородность по критерию  $\chi^2$ .
8. Для первой выборки из нормального распределения проверить гипотезы о параметрах нормального распределения.
9. Для двух независимых выборок из нормального распределения проверить гипотезу о равенстве средних (при условии равенства дисперсий).

Пример:

| <b>N</b><br><b>варианта</b> | <b>Фамилия</b>          | $a$ | $\sigma^2$ | $\gamma$ | $\alpha$ | $a_0$ и $\sigma_0^2$          |
|-----------------------------|-------------------------|-----|------------|----------|----------|-------------------------------|
| 1                           | Иванов Иван<br>Иванович | 0   | 1          | 0,99     | 0,05     | $a_0=0,5$ ,<br>$\sigma_0^2=1$ |

При генерации выборок из нормального распределения использовать параметры  $a$  и  $\sigma^2$ . Для проверки гипотез использовать параметры  $a_0$  и  $\sigma_0^2$ .

$\gamma$ ,  $\alpha$  – доверительный уровень и уровень значимости соответственно.

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 баллов (30 баллов - 1-й модуль и 30 баллов - 2-й модуль).

Обучающемуся, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55–57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

## **VII. Материально-техническое обеспечение**

Для аудиторной работы

|                                                                                  |                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Учебная аудитория № 304 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35) | Набор учебной мебели, экран, комплект аудиотехники (радиосистема, стационарный микрофон с настольным держателем, усилитель, микшер, акустическая система), проектор, ноутбук. |
|----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Для самостоятельной работы

|                                                                                                                                            |                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| Помещение для самостоятельной работы обучающихся: Компьютерный класс № 46<br><i>170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35</i> | Компьютер, экран, проектор, кондиционер. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|

## **VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

| № п.п. | Обновленный раздел рабочей программы дисциплины                                              | Описание внесенных изменений                | Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения  |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1      | V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины<br>2) Программное обеспечение | Внесены изменения в программное обеспечение | От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета |