

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 27.05.2024 14:19:02  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fccc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

«Утверждаю»

Руководитель ООП



А.А. Голубев

16.03.2024г.



**Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)**

**Нелинейная динамика в экономике**

Направление подготовки

**01.03.01 Математика**

Профиль подготовки

**Математическое обеспечение экономической деятельности**

Для студентов 4 курса

Форма обучения очная

**Тверь, 2024**

## I. Аннотация

### 1. Цель и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины «Нелинейная динамика в экономике» являются изучение основных понятий указанной дисциплины, необходимых для освоения ООП и последующей профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование знаний о математике, как особом способе познания мира и образе мышления, общности её понятий и представлений;
- выработка умений и навыков математической формализации задач для их последующего решения;
- формирование теоретических знаний и практических навыков по теории фракталов, теории хаоса как развитию теории динамических систем, необходимых для решения теоретических и прикладных задач профессиональной деятельности.

### 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к дисциплинам по выбору части учебного плана, формируемой участниками образовательных отношений.

Дисциплина необходима для формирования компетенций в области организационно-управленческой деятельности.

Для освоения дисциплины необходимы устойчивое знание курсов математического и комплексного анализа, дифференциальных уравнений и основ программирования.

Дисциплина изучается на 4 курсе.

### 4. Объём дисциплины:

5 зачётных единиц, 180 академических часов, в том числе

**контактная работа:** лекции 37 часов,

практические занятия 37 часов, в том числе практическая подготовка 12 часов

**самостоятельная работа:** 106 часов, в том числе контроль 27 часов

### 5. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

<b>Формируемые компетенции</b>	<b>Требования к результатам обучения</b> В результате изучения дисциплины студент должен:
ПК-3 Способен разрабатывать техническое задание, методические и рабочие программы, экономическое обоснование, прогноз и предложения по развитию соответствующей	ПК-3.1 Выявляет, собирает и анализирует информацию бизнес-анализа для проведения расчётов экономических показателей и формирования возможных решений, предлагает описание возможных решений ПК-3.2 Строит экономико-математические модели на основе современного алгоритмического инструментария, анализирует и содержательно интерпретирует полученные результаты

отрасли экономики, науки и техники	ПК-3.3 Использует информационно-коммуникационные технологии (программное обеспечение) для целей бизнес-анализа и при решении управленческих задач
---------------------------------------	---

**6. Форма промежуточной аттестации:** экзамен (8 семестр).

**7. Язык преподавания:** русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа				Самостоя- тельная работа, в том числе контроль (час.)
		Лекции		Практические занятия		
		всего	в т.ч. прак- тичес- кая подго- товка	всего	в т.ч. практиче- ская подготов- ка	
Раздел 1. <b>Динамика вещественных отображений</b>						
Аффинные отображения в $n$ – мерном арифметическом пространстве и на комплексной плоскости. Переход к другой системе координат. Компьютерное моделирование аффинных преобразований.	12	2	0	2	0	8
Неподвижные точки отображений. Итерации отображений. Циклические точки и циклы. Компьютерное моделирование циклов.	14	2	0	2	0	10
Метрика Хаусдорфа. Сходимость последовательностей множеств в метрике Хаусдорфа. Графическое построение расстояния между множествами.	12	2	0	2	0	8
Классические фракталы на плоскости: снежинка Коха, ковер Серпинского и др. Построение классических фракталов с помощью $L$ – систем.	16	4	0	4	0	8
Построение кривых, заполняющих множество, мера которого отлична от нуля.	14	2	0	2	0	10
Системы итерированных отображений. Аттракторы. Алгоритмы построения аттракторов систем итерированных функций. Алгоритмы построения фрактальных множеств, основанные на системах итерированных функций. Компьютерная реализация этих алгоритмов.	18	4	0	4	4	10
Размерность Минковского и размерность Хаусдорфа. Размерность кривой Пеано. Численное вычисление	14	2	0	2	0	10

размерности классических фракталов.						
Динамика одномерных отображений. Квадратичное отображение. Бифуркации удвоения периода. Универсальность Фейнгенбаума. Порядок Шарковского. Переход к хаосу. Компьютерное моделирование динамики одномерных отображений.	18	4	0	4	4	10
Раздел 2. <b>Комплексная динамика</b>						
Динамика комплексных полиномов на расширенной комплексной плоскости. Множества Жюлиа и Фату. Притягивающие, отталкивающие, нейтральные неподвижные точки и циклы голоморфных отображений. Мультипликаторы неподвижных точек. Притягивающие области. Структура множеств Жюлиа и Фату. Алгоритмы построения множеств Жюлиа и Фату. Компьютерная реализация этих алгоритмов.	16	4	0	4	4	8
Множество Мандельброта для параметрического семейства квадратичных отображений. Динамика отображений и структура множеств Жюлиа и Фату квадратичного семейства в зависимости от значений параметра. Заполненное множество Жюлиа. Динамика квадратичных отображений в случае односвязности заполненного множества Жюлиа.	18	4	0	4	0	10
Динамика некоторых рациональных отображений и параметрических семейств отображений на расширенной комплексной плоскости.	14	2	0	2	0	10
Динамика некоторых целых трансцендентных отображений и параметрических семейств отображений на комплексной плоскости.	14	5	0	5	0	4
<b>Итого:</b>	<b>180</b>	<b>37</b>	<b>0</b>	<b>37</b>	<b>12</b>	<b>106</b>

### III. Образовательные технологии

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании аудиторных занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Также на занятиях практикуется самостоятельная работа студентов, выполнение заданий в малых группах, письменные работы, моделирование дискуссионных ситуаций, работа с раздаточным материалом, привлекаются

ресурсы сети INTERNET. Курс предусматривает выполнение контрольных и самостоятельных работ, письменных домашних заданий. В качестве форм контроля используются различные варианты взаимопроверки и взаимоконтроля.

Интерактивное взаимодействие студентов с одной стороны и преподавателя с другой, а также студентов между собой и с преподавателем во время практических занятий.

#### ***Образовательные технологии***

1. Дискуссионные технологии
2. Информационные (цифровые)
3. Технологии развития критического мышления

#### ***Современные методы обучения***

1. Активное слушание
2. Лекция (традиционная)

### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

#### ***1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации***

##### **Темы семестровых заданий**

1. Моделирование аффинных преобразований.
2.  $L$ -системы.
3. Построение посредством  $L$ -систем кривых, заполняющих множество, мера которого отлична от нуля.
4. Построение посредством  $L$ -систем канторовских множеств.
5. Построение посредством  $L$ -систем фрактальных множеств.
6. Использование детерминированного алгоритма для реализации систем итерированных отображений.
7. Использование рандомизированного алгоритма для реализации систем итерированных отображений.
8. Вычисление размерности множеств.
9. Вычисление расстояний между множествами.
10. Построение аттракторов заданных одномерных отображений.
11. Построение репеллеров заданных одномерных отображений.
12. Вычисление постоянной Фейнгенбаума для параметрических семейств одномерных отображений.
13. Построение больших орбит голоморфных отображений.
14. Построение равновесных функций одномерных отображений
15. Построение множеств Жюлиа для заданных голоморфных отображений.
16. Построение пространств параметров для заданных семейств голоморфных отображений.
17. Построение равновесных функций голоморфных отображений.

##### **Исследовательские задания**

1. Моделирование процесса удвоения бифуркаций одномерных отображений.
2. Моделирование связей пространства параметров и множеств Жюлиа для параметрических семейств голоморфных отображений.
3. Моделирование хаоса на множестве Жюлиа.
4. Моделирование внешних лучей нейтральных параболических точек голоморфных отображений.
5. Моделирование областей притяжения метода Ньютона для голоморфных отображений.
6. Моделирование дисков Зигеля голоморфных отображений.
7. Моделирование колец Эрмана голоморфных отображений.

## 2. *Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации*

Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Типовые контрольные задания	Критерии оценивания и шкала оценивания
<p>ПК-3 Способен разрабатывать техническое задание, методические и рабочие программы, экономическое обоснование, прогноз и предложения по развитию соответствующей отрасли экономики, науки и техники</p> <p><i>ПК-3.1 Выявляет, собирает и анализирует информацию бизнес-анализа для проведения расчётов экономических показателей и формирования возможных решений, предлагает описание возможных решений</i></p> <p><i>ПК-3.2 Строит экономико-математические модели на основе современного алгоритмического инструментария, анализирует и содержательно интерпретирует полученные результаты</i></p> <p><i>ПК-3.3 Использует информационно-коммуникационные технологии (программное обеспечение) для целей бизнес-анализа и при решении управленческих задач</i></p>	<p>Пусть <math>x</math> – неподвижная точка действительной дифференцируемой функции <math>f(x)</math>.</p> <p>1. Покажите, что если <math> f'(x)  &lt; 1</math>, то <math>x</math> – притягивающая точка.</p> <p>2. Покажите, что если <math> f'(x)  &gt; 1</math>, то <math>x</math> – отталкивающая точка.</p> <p>3. Исследуйте свойства неподвижной точки в случае <math> f'(x)  = 1</math>. Покажите, что в этом случае точка <math>x</math> может быть притягивающей, может быть отталкивающей, может бы ни той ни другой. Приведите примеры.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены необходимые примеры; студент показывает понимание излагаемого материала</i> – 30 – 40 баллов</li> <li>• <i>Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены примеры, однако имеются неточности; в целом студент показывает понимание изученного материала</i> – 20 – 29 баллов</li> <li>• <i>Ответ дан в основном правильно, но недостаточно аргументированы выводы, приведены не все необходимые примеры</i> – 10 - 19 баллов</li> <li>• <i>Даны неверные ответы на поставленные вопросы</i> – 0 - 9 баллов</li> </ul>

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1) Рекомендуемая литература

#### а) Основная литература

1. Голубева Н.В. Математическое моделирование систем и процессов [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 192 с. — Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=76825](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=76825)

б) дополнительная литература

1. Р.М. Кроновер Р.М.. Фракталы и хаос в динамических системах / Р.М. Кроновер. М.: Техносфера, 2006. - 484 с.
2. Милнор Дж. Голоморфная динамика. / Дж. Милнор. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000. - 320 с.

### 2) Программное обеспечение

Google Chrome	бесплатное ПО
Яндекс Браузер	бесплатное ПО
Kaspersky Endpoint Security 10	акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE	бесплатное ПО
ОС Linux Ubuntu	бесплатное ПО

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

№ п/п	Вид информационного ресурса, наименование информационного ресурса	Адрес (URL)
1	ЭБС «ZNANIUM.COM»	<a href="https://znanium.com/">https://znanium.com/</a>
2	ЭБС «ЮРАИТ»	<a href="https://urait.ru/">https://urait.ru/</a>
3	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»	<a href="https://biblioclub.ru/">https://biblioclub.ru/</a>
4	ЭБС IPR SMART	<a href="http://www.iprbookshop.ru/">http://www.iprbookshop.ru/</a>
5	ЭБС «ЛАНЬ»	<a href="http://e.lanbook.com">http://e.lanbook.com</a>
6	ЭБС ТвГУ	<a href="http://megapro.tversu.ru/megapro/Web">http://megapro.tversu.ru/megapro/Web</a>
7	Репозиторий ТвГУ	<a href="http://eprints.tversu.ru">http://eprints.tversu.ru</a>
8	Ресурсы издательства Springer Nature	<a href="http://link.springer.com/">http://link.springer.com/</a>
9	СПС КонсультантПлюс (в сети ТвГУ)	

## VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

### Вопросы к экзамену

1. Аффинные отображения в  $n$  – мерном арифметическом пространстве и на комплексной плоскости

2. Неподвижные точки отображений. Итерации отображений. Циклические точки и циклы.
3. Метрика Хаусдорфа. Сходимость последовательностей множеств в метрике Хаусдорфа. Графическое построение расстояния между множествами.
4. Системы итерированных отображений. Аттракторы.
5. Размерность Минковского и размерность Хаусдорфа. Размерность кривой Пеано.
6. Одномерные квадратичные отображения. Бифуркации удвоения периода.
7. Универсальность Фейнгенбаума. Порядок Шарковского. Переход к хаосу.
8. Последовательности итераций голоморфных функций. Множества Жюлиа и Фату для комплексных полиномов.
9. Множество Мандельброта для параметрического семейства квадратичных отображений.
10. Принцип Дирихле (с доказательством).
11. Динамика отображений и структура множеств Жюлиа и Фату квадратичного семейства в зависимости от значений параметра.
12. Заполненное множество Жюлиа. Динамика квадратичных отображений в случае односвязности заполненного множества Жюлиа.
13. Динамика рациональных отображений и параметрических семейств отображений на расширенной комплексной плоскости.
14. Динамика целых трансцендентных отображений и параметрических семейств отображений на комплексной плоскости.

### **Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

*Во-первых*, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

*Во-вторых*, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

**1. Работа с учебными пособиями.** Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины.

Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

**2. Самостоятельное изучение тем.** Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту и экзамену.

**3. Подготовка к практическим занятиям.** При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

**4. Составление глоссария.** В глоссарий должны быть включены основные понятия, которые студенты изучают в ходе самостоятельной работы. Для полноты исследования рекомендуется вписывать в глоссарий и те термины, которые студентам будут раскрыты в ходе лекционных занятий.

**5. Составление конспектов.** В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

**6. Подготовка к экзамену.** При подготовке к экзамену студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе занятий.

Качество усвоения студентом каждой дисциплины оценивается по 100-балльной шкале.

Интегральная рейтинговая оценка (балл) по каждому модулю (периоду обучения) складывается из оценки текущей работы обучающихся на занятиях семинарского типа (семинары, практические занятия, практикумы, лабораторные работы, коллоквиумы и иные аналогичные занятия), оценки индивидуальной работы обучающихся и оценки за выполнение заданий рейтингового контроля успеваемости. При этом доля баллов, выделенных на рейтинговый контроль, не должна превышать 50% общей суммы баллов данного модуля (периода обучения).

Максимальная сумма рейтинговых баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60.

Обучающемуся, набравшему 40-54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55-57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58-60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично».

В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен. При наличии подтвержденных документально уважительных причин, по которым были пропущены занятия (длительная болезнь, обучение в другом вузе в рамках академической мобильности и др.), обучающийся имеет право отработать пропущенные занятия и получить дополнительные баллы в рамках установленных баллов за модуль. Сроки и порядок отработки определяет преподаватель. Баллы выставляются в графе «отработка».

Ответ обучающегося на экзамене оценивается суммой до 40 рейтинговых баллов. Итоговая оценка складывается из суммы баллов, полученных за семестр, и баллов, полученных на экзамене. Обучающемуся, который сдает экзамен, премиальные баллы не начисляются.

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.

- Сроки проведения рейтингового контроля:

*осенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

*весенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

## **VII. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

<b>Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы</b>	<b>Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы</b>	<b>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</b>
---	--	---

<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, учебная аудитория: № 208 (170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)</p>	<p><i>Комплект учебной мебели, CD-магнитола, компьютер: (системный блок + монитор), многофункциональный лазер. копир/принтер/сканер, видеоплеер, телевизор, DVD плеер.</i></p>	<p>Google Chrome – бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus – бесплатно OpenOffice – бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО – бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО – бесплатно</p>
--	--	---

### **VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

<b>№ п.п.</b>	<b>Обновленный раздел рабочей программы дисциплины</b>	<b>Описание внесенных изменений</b>	<b>Дата и № протокола заседания кафедры / методического совета факультета, утвердившего изменения</b>
<b>1.</b>			
<b>2.</b>			