

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 27.06.2025 14:12:57  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:  
Руководитель ООП:  
А.В.Язенин  
«25» мая 2023 года



Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Направление подготовки

02.04.02 – «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Направленность (профиль)

«Информационные технологии в управлении и принятии решений»

Для студентов 1-го курса

Форма обучения - очная

Составитель:

д.ф.-м.н., доцент Дудаков С.М.

Тверь, 2023

## I. Аннотация

### 1. Цель и задачи дисциплины:

Ознакомить обучающихся с современным состоянием теории рекурсивных функций и связанными с ней вопросами теории алгоритмов.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина входит в раздел «Элективные дисциплины» части, формируемой участниками образовательных отношений, блока 1.

**Предварительные знания и навыки.** знание математической логики, теории алгоритмов, теории множеств.

**Дальнейшее использование.** Полученные знания могут применяться при выполнении научно-исследовательской работы, при прохождении научно-исследовательской практики, при написании магистерской диссертации.

**3. Объем дисциплины:** \_\_\_3\_\_\_ зачетных единицы, \_\_\_108\_\_\_ академических часов, в том числе:

**контактная аудиторная работа:** лекции 16 часов, в т.ч. практическая подготовка 0 часов; практические занятия 16 часов, в т.ч. практическая подготовка 0 часов;

**самостоятельная работа:** \_76\_ часов, в том числе контроль \_\_36\_\_.

### 4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы:

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ПК-2 Способен применять в научно-исследовательской и прикладной деятельности современные языки программирования и методы представления и обработки знаний и данных, операционные системы, электронные библиотеки и пакеты программ, сетевые технологии	ПК-2.1 Знает и применяет современные языки программирования и методы обработки знаний и данных ПК-2.2 Реализовывает численные методы решения задач профессиональной деятельности, пакеты программного обеспечения, операционные системы, сетевые технологии ПК-2.3 Применяет существующие методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов и изображений, разработки информационных систем

ПК-3 Способен проектировать информационные системы, их компоненты и протоколы их взаимодействия, собирать, обрабатывать и интерпретировать экспериментальные данные и знания, необходимые для проектной и производственно-технологической деятельности; разрабатывать новые алгоритмические, методические и технологические решения в конкретной сфере профессиональной деятельности	ПК-3.1 Знает основы проектирования и элементы архитектурных решений информационных систем ПК-3.2 Применяет в практической деятельности профессиональные стандарты в области информационных технологий ПК-3.3 Составляет техническое задание на разработку информационной системы
--	--

**5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения:** экзамен, 2 семестр

**6. Язык преподавания** русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Самостоятельная работа, в том числе Контроль (час.)	
		Лекции		Практические занятия			Контроль самостоятельной работы (в том числе курсовая работа)
		всего	в т.ч. практическая подготовка	всего	в т.ч. практическая подготовка		
Формализации и нумерации	19	2		2		15	
Рекурсивность и рекурсивная перечислимость	23	4		4		15	
Сводимости, полные множества	23	4		4		15	
Рекурсия в высших типах	19	2		2		15	
Иерархии	24	4		4		16	
<b>ИТОГО</b>	<b>108</b>	<b>16</b>		<b>16</b>		<b>76</b>	

## Учебная программа дисциплины

### 1. Формализации и нумерации

- Формализации понятия алгоритм: машины Тьюринга, частично рекурсивные функции, алгорифмы Маркова, А-исчисление, счетчиковые машины
- Нумерация алгоритмов, универсальные функции

### 2. Рекурсивность и рекурсивная перечислимость

- Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества, их связь
- Рекурсивность и нерекурсивность теоретико-множественных операций
- Перечисления с особыми свойствами: однозначные, возрастающие

### 3. Сводимости, полные множества

- Формы сводимости: 1, m, tt и T-сводимости
- Теорема о рекурсии, продуктивные, креативные множества, цилиндры, 1-полнота, m-полнота
- Иммунные множества, простые множества, tt-полнота
- Гипериммунные и гиперпростые множества, T-полнота
- Проблема Поста, решение Фридберга-Мучника
- Решетки классов неразрешимости

### 4. Рекурсия в высших типах

- Рекурсивные операторы и функционалы
- Сводимость перечислением
- Теорема о рекурсии
- Рекурсивные ординалы

### 5. Иерархии

- Арифметическая иерархия, определения, связь с арифметикой
- Примеры задач разных уровней неразрешимости
- Неарифметичность множества истинных арифметических формул
- Аналитическая иерархия
- Примеры задач класса  $\Pi_1^1$

### III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем (в строгом соответствии с разделом II РПД)	Вид занятия	Образовательные технологии
Формализации и нумерации	Лекции, практические занятия	Изложение теоретического материала, решение задач
Рекурсивность и рекурсивная перечислимость	Лекции, практические занятия	Изложение теоретического материала, решение задач
Сводимости, полные множества	Лекции, практические занятия	Изложение теоретического материала, решение задач
Рекурсия в высших типах	Лекции, практические занятия	Изложение теоретического материала, решение задач
Иерархии	Лекции, практические занятия	Изложение теоретического материала, решение задач

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: семинары, сопровождаемые презентациями; компьютерное тестирование; выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

### IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

#### 1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций:

ПК-2 Способен применять в научно-исследовательской и прикладной деятельности современные языки программирования и методы представления и обработки знаний и данных, операционные системы, электронные библиотеки и пакеты программ, сетевые технологии

Результат (индикатор)	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3	Примеры вопросов к экзамену: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Иерархия по операции скачка</li> <li>• Классы арифметической иерархии</li> <li>• Классы аналитической иерархии</li> <li>• Элементарная арифметика и элементарный анализ</li> <li>• Неарифметичность множества истинных арифметических формул</li> <li>• Неаналитичность множества истинных аналитических формул</li> <li>• Операция скачка</li> </ul>	оценка 3 — знает определения классов аналитической иерархий, положение в них основных алгоритмических проблем, оценка 4 — кроме того, знает свойства этих иерархий и классов, оценка 5 — кроме того, знает доказательства
	Примеры вопросов к экзамену: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Рекурсивные операторы и функционалы</li> <li>• Сводимость перечислением</li> <li>• Теорема о рекурсии</li> </ul>	оценка 3 — знает определения различных формализации рекурсивных действий с объектами высших порядков, оценка 4 — кроме того, знает свойства этих формализаций, оценка 5 — кроме того, знает доказательства указанных утверждений
	Примеры вопросов к экзамену: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Цилиндры</li> <li>• Связь 1-полноты и <math>m</math>-полноты</li> <li>• Иммунные множества и простые множества</li> <li>• Трудные и полные множества</li> <li>• Релятивизированные вычисления</li> <li>• Сводимость по Тьюрингу</li> <li>• Гипериммунные и гиперпростые множества</li> <li>• Т-полнота, теорема Деккера</li> <li>• Проблема Поста, решение Фридберга-Мучника</li> <li>• Максимальные и сжатые множества</li> </ul>	оценка 3 — знает определения различных сводимостей, оценка 4 — кроме того, знает свойства этих сводимостей, оценка 5 — кроме того, знает доказательства указанных утверждений

ПК-3 Способен проектировать информационные системы, их компоненты и протоколы их взаимодействия, собирать, обрабатывать и интерпретировать экспериментальные данные и знания, необходимые для проектной и производственно-технологической деятельности; разрабатывать новые алгоритмические, методические и технологические решения в конкретной сфере профессиональной деятельности

Результат (индикатор)	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
ПК-3.1 ПК-3.2 ПК-3.3	<p>Примеры задачи для контрольных работ</p> <p>Локазать, что в любом бесконечном рекурсивном множестве существует нерекурсивное, но рекурсивно перечислимое подмножество.</p> <p>Доказать, что множество номеров функций с пустой областью определения не рекурсивно перечислимо.</p>	<p>оценка 3 — умеет использовать какой-либо вид алгоритмической сводимости,</p> <p>оценка 4 — кроме того, умеет использовать различные модели релятивизации,</p> <p>оценка 5 — кроме того, умеет применять различные виды алгоритмической сводимости</p>
	<p>Примеры задачи для контрольных работ</p> <p>Представить в элементарной арифметике функцию, вычисляющую количество простых делителей числа <math>x</math>.</p> <p>Записать в элементарном анализе формулу, которая по номеру множества определяет, является ли оно арифметическим.</p> <p>Локазать, что множество истинных в системе <math>(\mathbb{R}, \mathbb{N}; x, e^x)</math> формул не является аналитическим.</p> <p>Определить, в каком классе арифметической иерархии лежит следующее множество <math>(\Phi</math> — геделева нумерация двухместных ч.р.ф.)  <math>B = \{x \in \mathbb{N} : \text{д}\Phi_x \text{ является о.р.ф.}\}</math>.</p> <p>Доказать, что множество номеров конечных рекурсивно перечислимых</p>	<p>оценка 3 — умеет грубо определять верхнюю границу неразрешимости с помощью алгоритма Куратовского,</p> <p>оценка 4 — кроме того, умеет определять верхнюю границу неразрешимости с нетривиальных случаях,</p> <p>оценка 5 — кроме того, умеет находить нижнюю границу неразрешимости</p>

	множеств принадлежит второму уровню арифметической иерархии.	
	<p>Примеры задачи для контрольных работ</p> <p>Определить рекурсивный оператор, который по входному множеству геделевых номеров одноместных ч.р.ф. выдает его подмножество, состоящее из номеров тех функций, которые определены хотя бы в одной точке.</p> <p>Показать, что следующий оператор не является рекурсивным: по входному множеству геделевых номеров одноместных ч.р.ф. выдает его подмножество, состоящее из номеров о.р.ф.</p> <p>Определить рекурсивный оператор, который по графику функции выдает множество ее значений, принимаемых более чем однажды.</p>	<p>оценка 3 — умеет определять строить простейшие рекурсивные операторы с использованием одной из формализаций,</p> <p>оценка 4 — умеет использовать операторы различной сложности с использованием разных формализаций,</p> <p>оценка 5 — кроме того, умеет устанавливать нерекурсивность операторов</p>

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1. Рекомендуемая литература

#### а) Основная литература:

- [1] Марченков, С.С. Рекурсивные функции [Электронный ресурс]: — Электрон. дан. — М.: Физматлит, 2007. — 62 с. — Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2260](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2260) — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).
- [2] Верещагин Н.К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.К. Верещагин, Шень А. — Электрон. дан. — М.: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2008. — 190 с. — Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=9308](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9308) — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).
- [3] Тихомирова, А.Н. Практикум по теории алгоритмов: учебное пособие для вузов [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.Н. Тихомирова, Н.В. Сафоненко. — Электрон. дан. — Москва: НИЯУ МИФИ, 2011. — 132 с. — Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=75837](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=75837)

#### б) Дополнительная литература:

1. Игошин В.И. Теория алгоритмов: Учебное пособие / В.И. Игошин. — М.: ИНФРА-М, 2019. — 318 с.: 60x90 1/16. — (Высшее образование).

(переплет) ISBN 978-5-16-005205-2 — Режим доступа:  
<http://znanium.com/catalog/document?id=368264> (ЭБС ИНФРА-М)

## 2. Программное обеспечение

<b>Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 46 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)</b>	
Adobe Acrobat Reader DC - Russian	бесплатно
Apache Tomcat 8.0.27	бесплатно
Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
GlassFish Server Open Source Edition 4.1.1	бесплатно
Google Chrome	бесплатно
Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit)	бесплатно
JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3	бесплатно
JetBrains PyCharm Edu 3.0	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus 1.4.0	бесплатно
Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно
MiKTeX 2.9	бесплатно
MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно
NetBeans IDE 8.2	бесплатно
Notepad++	бесплатно
Oracle VM VirtualBox 5.0.2	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.1 pygame-1.9.1	бесплатно
Python 3.4 numpy-1.9.2	бесплатно
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64-bit)	бесплатно
WCF RIA Services V1.0 SP2	бесплатно
WinDjView 2.1	бесплатно
R Studio	бесплатно
Anaconda3 2019.07 (Python 3.7.3 64-bit)	бесплатно

3. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com);
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>;
3. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>.

4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Московский центр непрерывного математического образования,  
<http://www.mccme.ru/>

## **VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины** **Выставление оценок**

**Контрольная работа 1.** Темы: элементарная арифметика. Пример задания: Представить в элементарной арифметике частичную функцию  $f(x)$ . Значение  $f(x)$  равняется наименьшему основанию системы счисления, в которой запись  $x$  не содержит нулей. При  $x = 0$  значение функции неопределено.

За решение задачи выставляется максимум 10 баллов.

**Контрольная работа 2.** Темы: арифметическая иерархия. Пример задания:

Определить, в каком классе арифметической иерархии лежит следующее множество

$B = \{x \in \mathbb{N} : \text{область определения } \Phi_x \text{ — это в точности множество четных чисел}\}$ . За решение задачи выставляется максимум 10 баллов.

**Контрольная работа 3.** Темы: рекурсия в высших типах. Пример задания: Доказать, что существует рекурсивный оператор, который по  $x$  перечисляет номера множеств  $W_i$ , начальный сегмент которых включает  $D_x$ .

За решение задачи выставляется максимум 10 баллов.

**Общая сумма** В сумме за все задачи выставляет не более 30 баллов.

За работу на практических занятиях (решение задач у доски, выполнение домашних заданий) выставляется максимум 30 баллов.

За ответ на экзамене выставляется максимум 40 баллов.

## **VII. Материально-техническое обеспечение**

Для аудиторной работы.

Учебная аудитория № 212 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, мультимедийный комплекс (доска, проектор, панель управления).
--	---

Учебная аудитория № 206 (170002, Тверская область, г.Тверь, пер. Садовый, д.35)	Набор учебной мебели, экран, проектор.
---	--

#### Для самостоятельной работы

Помещение для самостоятельной работы обучающихся: Компьютерный класс факультета ПМиК № 46 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Компьютер, экран, проектор, кондиционер.
--	---

### VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1.	V. Учебно-методическое и информационное обеспечение, необходимое для проведения практики 2) Программное обеспечение	Внесены изменения в программное обеспечение	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета
2.	I. Аннотация 3. Объем дисциплины II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий	Изменения в количестве зачетных единиц и часах на самостоятельную работу	От 29.02.2024 года, протокол № 8 ученого совета факультета
3.	I. Аннотация 3. Объем дисциплины II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий	Изменения в количестве зачетных единиц в часах на самостоятельную работу и замена зачета на экзамен	От 16.01.2025 года, протокол № 7 ученого совета факультета
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			