МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Утверждаю:

Руководитель ООП

____________ Б.Б.Педько

«21» мая 2024 г.

Рабочая программа дисциплины

МАТЕМАТИКА
Векторный и тензорный анализ

Закреплена за кафедрой:	**Общей физики**
Направление подготовки:	**03.03.02 Физика**
Направленность (профиль):	**Медицинская физика**
Квалификация:	**Бакалавр**
Форма обучения:	**очная**
Семестр:	**3**

Программу составил(и):

канд. физ.-мат. наук, доц., Зубков Виктор Викторович

Тверь, 2024

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели освоения дисциплины (модуля):

Целью освоения дисциплины является:

формирование и развитие у обучающихся компетенций в области векторного и тензорного анализа и его приложений к физическим и техническим задачам.

Задачи:

Задачами освоения дисциплины являются:

- освоение основных понятий и идей, лежащих в основе современного тензорного анализа;
- овладение навыками и приемами решения задач в области современной физики, связанных с использованием векторного и тензорного исчисления.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП

Цикл (раздел) ОП: Б1.О.11Б1.О

Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Для освоения дисциплины студенту нужно знать следующие предметы:

Математический анализ

Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Дисциплины (модули) и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Методы математической физики

Теоретическая механика

Электродинамика

Кристаллография

Физика нелинейных кристаллов

Физика конденсированного состояния вещества

Нанотехнологии в физике конденсированного состояния

Физика магнитных материалов

Физика диэлектриков

3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость	3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе:	
аудиторные занятия	34
самостоятельная работа	34

4. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫЕ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

ОПК-1.2: Применяет знания в области физико-математических наук при решении практических задач в сфере профессиональной деятельности

УК-1.1: Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие

УК-1.2: Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи

УК-1.5: Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки

5. ВИДЫ КОНТРОЛЯ

Виды контроля в семестрах:	
зачеты	3

6. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ

Язык преподавания: русский.

7. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занят.	Наименование разделов и тем	Вид занятия	Семестр / Курс	Часов	Источ-ники	Примечан-ие
	Раздел 1. Элементы векторной алгебры					
1.1	Общее определение вектора. Скалярное произведение. Метрический тензор. Взаимный базис. Ко- и контравариантные компоненты. Регулярные криволинейные координаты. Координатные линии и поверхности. Коэффициенты Ламэ. Ортогональные координаты. Физические компоненты векторов. Пример: скорость в криволинейной системе координат.	Лек	3	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5 Л1.6 Л1.7	
1.2	Символ Леви-Чивиты. Векторное произведение. Смешанное произведение. Двойное векторное произведение. Вычисление объема, построенного на заданных векторах. Пример. Зона Бриллюэна – ячейка Вигнера-Зейтца в обратном пространстве. Поворот и инверсия. Аксиальные и полярные векторы. Пример: напряженность электрического поля и напряженность магнитного поля.	Лек	3	1	Л1.1 Л1.4 Л1.7	

1.3	Общее определение вектора. Скалярное произведение. Метрический тензор. Взаимный базис. Ко- и контравариантные компоненты. Регулярные криволинейные координаты. Координатные линии и поверхности. Коэффициенты Ламэ. Ортогональные координаты. Физические компоненты векторов. Символ Леви-Чивиты. Векторное произведение. Смешанное произведение. Двойное векторное произведение. Вычисление объема, построенного на заданных векторах	Пр	3	3	Л1.3 Л1.4 Л1.6	
1.4	Алгебра векторов. Векторы в криволинейных СК. Метрический тензор. Символ Леви-Чивита	Ср	3	4	Л1.3 Л1.4 Л1.6	
	Раздел 2. Основы векторного анализа					
2.1	Векторные и скалярные поля. Производная по направлению. Линии уровня. Градиент скалярного поля. Оператор Гамильтона. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского-Гаусса.	Лек	3	1	Л1.3 Л1.4 Л1.6	
2.2	Ротор векторного поля. Теорема Стокса. Формула Грина. Оператор Лапласа. Первая и вторая формулы Грина. Теорема Гельмгольца. Пример: уравнения Максвелла. Векторный потенциал.	Лек	3	1	Л1.2 Л1.4 Л1.6	
2.3	Дифференциальные операции в криволинейной системе координат. Элемент длины, площади и объема. Градиент. Ковариантная производная. Дивергенция. Символы Кристоффеля первого и второго рода. Оператор Лапласа. Векторное произведение в криволинейной системе координат. Ротор. Пример: ускорение, второй закон Ньютона в криволинейных координатах, уравнение Лагранжа второго рода.	Лек	3	2	Л1.2 Л1.3 Л1.6	

2.4	Векторные и скалярные поля.	Пр	3	2	Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.6	
2.5	Дифференциальные операции в криволинейной системе координат.	Пр	3	3	Л1.3 Л1.4 Л1.6	
2.6	Дифференциальные операции в криволинейной системе координат.	Ср	3	4	Л1.3 Л1.4 Л1.6	
	Раздел 3. Тензорная алгебра					
3.1	Начальные представления о тензорах. Операции над тензорами: сложение, свертка, тензорное умножение, симметрирование, альтернирование. Кососимметричный тензор. Примеры. Инвариантные тензоры. Изотропные тензоры. Девиатор, шаровой тензор. Собственные значения и векторы тензора. Тенор деформации. Закон Гука. Инварианты Тензора. Тензорная поверхность. Тензор ЭМ поля. Понятие относительного тензора.	Лек	3	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5 Л1.6 Л1.7	
3.2	Геометрический взгляд на тензоры. Множества и топология. Карты и атлас. Гладкая структура. Дифференцируемое многообразие. Скалярная функция на многообразии. Векторное поле на многообразии. Сопряженное пространство. 1-форма. Определение тензора. Дифференциальные формы и поливекторы. Дифференциальная форма максимальной степени. Относительный тензор. Оператор Ходжа (Ходжевская дуальность).	Лек	3	3	Л1.1 Л1.4 Л1.5 Л1.6 Л1.7	
3.3	Тензоры и операции над ними	Пр	3	4		
3.4	Геометрический взгляд на тензоры.	Ср	3	12	Л1.1 Л1.2 Л1.5	
	Раздел 4. Тензорный анализ					

4.1	Начальные представления. Дифференцирование тензоров. Дифференциал тензора, градиент тензора. Дивергенция тензора. Теорема Риччи. Примеры. Двукратное дифференцирование тензоров. Интегрирование тензоров. Теоремы Остроградского-Гаусса и Стокса.	Лек	3	2	Л1.1 Л1.2 Л1.5 Л1.6	
4.2	Современный взгляд. Внешняя производная дифференциальной формы, свойства внешней производной. Замкнутые и точные дифференциальные формы. Лемма Пуанкаре. Форма объема. Дифференциальные операторы векторного анализа (дивергенция, лапласиан, ротор) на языке внешнего дифференцирования. Основные тождества векторного анализа как следствия свойств внешнего дифференциала. Пример. Уравнения электродинамики на языке дифференциальных форм. Интеграл от дифференциальной формы. Общая интегральная формула Стокса. Теорема Гаусса о дивергенции. Формулы Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса как частные случаи общей формулы Стокса.	Лек	3	3	Л1.1 Л1.2 Л1.4 Л1.5	
4.3	Дифференцирование и интегрирование тензоров	Пр	3	5	Л1.1 Л1.2 Л1.5	
4.4	Дифференциальные формы и действия над ними.	Ср	3	14	Л1.2	

Список образовательных технологий

1	Активное слушание

8. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

8.1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации

См. приложение

8.2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

См. приложение

8.3. Требования к рейтинг-контролю

Студенты, освоившие программу курса «Векторный и тензорный анализ» могут получить зачет по итогам семестровой и полусеместровой рейтинговой аттестации согласно «Положению о рейтинговой системе обучения ТвГУ» (протокол №8 от 30 апреля 2020 г.).

Если условия «Положения о рейтинговой системе …» не выполнены, то зачет сдается согласно «Положению о промежуточной аттестации (экзаменах и зачетах) обучающихся по программам высшего образования ТвГУ» (протокол №11 от 28 апреля 2021 г.).

Модуль 1.
Контрольная работа - 20 баллов
Решение задач на практике - 20 баллов

Модуль 2
Контрольная работа - 20 баллов
Решение задач на практике - 20 баллов
зачет - 20 баллов

9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

9.1. Рекомендуемая литература

9.1.1. Основная литература

Шифр	Литература
Л1.1	Мусин, Тензорный анализ. Вводный курс с приложениями к анализу и геометрии, Москва: Юрайт, 2024, ISBN: 978-5-534-06198-7, URL: https://urait.ru/bcode/539670
Л1.2	Кумпяк, Векторный и тензорный анализ, Тверь: Тверской государственный университет, 2007, ISBN: , URL: http://texts.lib.tversu.ru/texts2/01616ucheb.pdf
Л1.3	Волкова В. И., Закинян Р. Г., Векторный и тензорный анализ : курс лекций, Ставрополь: СКФУ, 2022, ISBN: , URL: https://e.lanbook.com/book/386552
Л1.4	Григорьев А. И., Ширяева С. О., Кузьмичев Ю. Б., Векторный анализ и тензорная алгебра, Ярославль, 2015, ISBN: 978-5-00089-078-3, URL: https://e.lanbook.com/book/363251
Л1.5	Горлач Б. А., Тензорная алгебра и тензорный анализ, Санкт-Петербург: Лань, 2022, ISBN: 978-5-8114-1834-3, URL: https://e.lanbook.com/book/211781
Л1.6	Логинов А. С., Мирошин Н. В., Селиванова С. Г., Избранные разделы курса "Векторный анализ" (теория и примеры), Москва: НИЯУ МИФИ, 2009, ISBN: 978-5-7262-1118-3, URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=75846
Л1.7	Мак-Коннел А. Д., Коренев Г. В., Введение в тензорный анализ, Москва: Гос. изд-во физико-математической лит., 1963, ISBN: , URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=116257

9.3.1 Перечень программного обеспечения

9.3.2 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1	ЭБС «ZNANIUM.COM»
2	ЭБС «ЮРАИТ»
3	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
4	ЭБС «Лань»

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аудит-я	Оборудование
3-202б	комплект учебной мебели, переносной ноутбук, переносной мультимедийный проектор, экран
3-218	комплект учебной мебели, переносной ноутбук, проектор, экран
3-226	комплект учебной мебели, Микшерный пульт, Аудиокомплект, Интерактивная система, проектор, Телекоммуникационные шкафы, экран, компьютер
3-227	комплект учебной мебели, переносной ноутбук, проектор, экран
3-228	комплект учебной мебели, переносной ноутбук, проектор, экран

11. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

См. приложение

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Для проведения текущей и промежуточной аттестации:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач:

УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие;

УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи;

УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.

Для всех индикаторов один способ аттестации.

Пример 1:

Задание:

Доказать тождество Лагранжа

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}][\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad}\\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{bd}\end{vmatrix}$$

Способ аттестации: письменная самостоятельная индивидуальная работа.

Критерии оценки: 1. Низкий уровень (1 балл), если студент может записать выражение для векторного и скалярного произведений. Имеет представление о символах Леви-Чивита для записи векторного произведения. Проводит расчеты с ошибками. **2. Средний уровень (2 балла),** если студент может записать выражение для векторного и скалярного произведений. Уверенно использует символы Леви-Чивита для записи векторного произведения. Проводит доказательство с некоторыми недочетами. **2. Высокий уровень (3 балла),** если записать выражение для векторного и скалярного произведений. Уверенно использует символы Леви-Чивита для записи векторного произведения. Правильно проводит расчеты.

Пример 2:
Задание:
1. Показать, что поле $\boldsymbol{a} = grad\psi \times grad\varphi$ является вихревым. Здесь φ, ψ – скалярные поля.
2. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{a} = \dfrac{f(r)}{r}\mathbf{r}$ является потенциальным, найти его потенциал.
3. Найти лапласиан скалярного поля $f = c\rho(3R - 2\rho)\cos\varphi$, заданного в цилиндрических координатах.

Способ аттестации: письменная самостоятельная работа.

Критерии оценки: 1 балл, если правильно решил только одну задачу**;**

2 балла, если правильно решил две задачи, или три задачи, но с некоторыми ошибками;

3 балла, если правильно решил все три задачи.

ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности:

ОПК-1.2. Применяет знания в области физико-математических наук при решении практических задач в сфере профессиональной деятельности;

Пример 1:

Задание: Сформулируйте и запишите математическую формулировку теоремы Остроградского-Гаусса. Привести пример из физики.

Способ аттестации: Беседа со студентом

Критерии оценки: 1. Высокий уровень: Знает формулировку теоремы Остроградского-Гаусса. Записывает ее. Понимает физическое содержание. **2. Средний уровень**. Записывает математическое выражение для теоремы Остроградского-Гаусса. Путается в формулировке и физическом содержании. **3. Низкий уровень**: Неуверенно записывает математическое выражение для теоремы

Остроградского-Гаусса. Не знает о физическом (смысловом) содержании. Путается в формулировке.

Пример 2. Задание: Пространство Минковского E_4 с метрикой $G = diag(1,-1,-1,-1)$. Тензор электромагнитного поля

$$F = \left(F_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Показать, что инварианты электромагнитного поля имеют вид

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = \text{invar},$$
$$(\mathbf{EH})^2 = \text{invar}$$

и прояснить физический смысл этих инвариантов.

Способ аттестации: письменная самостоятельная работа и собеседование по ее результатам.

Критерии оценки: 1 балл, если имеет представление о метрике, о кососимметричном тензоре и об инвариантах тензорного поля второго ранга.

2 балла, если к тому же может объяснить и записать общую формулу для вычисления инвариантов тензора второго ранга.

3 балла, если к тому же объяснил физический смысл.

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) Основная литература:

1. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. 1937. 454 с. Электронный ресурс. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=105572&sr=1

2. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005, 584 с. Электронный ресурс. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=61810&sr=1
3. Гордиенко А. Б. , Золотарев М. Л. , Кравченко Н. Г. Основы векторного и тензорного анализа: учебное пособие. Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2009, 133 с. Электронный ресурс. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=232488&sr=1

б) Дополнительные источники:

1. Келлер И.Э. Тензорное исчисление. СПб: «Лань», 2012. 176 с. Электронный ресурс. - Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/3814/
2. Акивис М. А. , Гольдберг В. В. Тензорное исчисление: учебное пособие М.: Физматлит, 2005, 305 с. Электронный ресурс. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=67297&sr=1

2) Программное обеспечение

а) Лицензионное программное обеспечение (математический пакет Maple)

б) Свободно распространяемое программное обеспечение (математический пакет Maxima)

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1.ЭБС«ZNANIUM.COM» www.znanium.com;

2.ЭБС «Университетская библиотека онлайн» https://biblioclub.ru/;

3.ЭБС «Лань» http://e.lanbook.com

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Вопросы к зачету для оценивания теоретических знаний, как правило, соответствуют разделам лекций и выкладываются преподавателем на страницу курса в Teams.

Необходимым требованием для сдачи зачета является решение задач, условия которых приведены в лекционном курсе. Обновленные варианты лекций выкладываются преподавателем на страницу курса в Teams.

– методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов.

1. Изучить рекомендуемую литературу.
2. Просмотреть задачи, разобранные на аудиторных занятиях.
3. Разобрать задачи, рекомендованные преподавателем для самостоятельного решения, используя, при необходимости, примеры решения аналогичных задач.
4. Обсудить проблемы, возникшие при решении задач или освоении теоретического материала с преподавателем.

– примеры вопросов и задач к зачету:

1. Определение вектора.
2. Определение скалярного и векторного произведений векторов.
3. Найти скалярные произведения векторов $\boldsymbol{a}^T = (-4,1,1)$ и $\boldsymbol{b}^T = (1,2,-2)$, если метрика имеет вид $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти также контравариантные компоненты указанных векторов.
4. Записать в векторном (инвариантном) виде $a_i b^n c^k \varepsilon_{klm} a^l \delta^i_n b^m$
5. Используя символы Леви-Чивиты, доказать тождество $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$.

6. Определения градиента скалярного поля и производной по направлению.
7. Найти угол между градиентами поля

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

в точках $A(1,2,2)$ и $B(-3,1,0)$.

8. Найти производную скалярного поля $\varphi(x,y,z)$ по направлению градиента скалярного поля $\psi(x,y,z)$. При каком условии она равна нулю?
9. Определение векторных линий векторного поля. Примеры.
10. Найти векторную линию векторного поля $\mathbf{r} = \mathbf{i}\exp(x) + \mathbf{j}\exp(-y) + \mathbf{k}z$, проходящую через точку $P(-1,0,1)$.
11. Определения дивергенции и ротора векторного поля.
12. Потенциальное, соленоидальное поле. Примеры из физики.
13. Теорема Гельмгольца о разложении векторного поля.
14. Лапласиан скалярного поля.
15. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\mathbf{A} = \frac{x+y+z}{xyz}\mathbf{r}$.
16. Доказать, что векторное поле $\mathbf{A} = \boldsymbol{a} \times \mathrm{grad}\varphi$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор, является вихревым.
17. Сформулируйте теоремы Остроградского-Гаусса и Стокса.
18. Доказать тождество $\mathrm{div}[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] = (b, \mathrm{rot}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \mathrm{rot}\boldsymbol{b})$.
19. Доказать тождество $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2 - [\mathbf{v} \times rot\mathbf{v}]$.
20. Доказать тождество $\int\limits_V (\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{rot}\boldsymbol{a})\,dV = \oint\limits_S \varphi(\mathrm{rot}\boldsymbol{a}, d\mathbf{S})$.
21. Определение коэффициентов Ламэ. Физические компоненты ветора.
22. Определение символов Кристоффеля первого и второго рода.
23. Дан вектор своими физическими компонентами в псевдоцилиндрических координатах:

$$A_{r\phi} = r^2\sqrt{a^2 + b^2}\sin\psi$$

$$A_{\psi\phi} = -r^2\sqrt{a^2 + b^2}\cos\psi$$

$$A_{z\phi} = r^2$$

Найти ротор и дивергенцию этого векторного поля. Псевдоцилиндрические координаты $q^1 = r,\ q^2 = \psi,\ q^3 = z$, $0 \le r < \infty$, $0 \le \psi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

$$\begin{cases} x = ar\sin\psi, \\ y = br\cos\psi, \\ z = z. \end{cases}$$

24. Определение тензора типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.
25. Тензорное произведение тензоров. Пример: диада.
26. Операции симметрирования и альтернирования. Проиллюстрировать на примере тензора второго ранга.
27. Ковариантная производная вектора и тензора второго ранга типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

28. В некотором базисе тензор T типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ имеет координаты $\left(T_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Даны также векторы $\left(x^k\right)=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $\left(y^k\right)=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Метрический тензор имеет координаты $\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти
    a. $\left(T^{ij}\right)$ и $\left(T_{i\bullet}^{\bullet j}\right)$, **b**. $T_{ij}y^j$, **c**. $T\otimes x$, **d**. $Sp_2^1\left(T\otimes x\right)$, **e**. $Sp_{12}^{12}\left(T\otimes x\otimes y\right)$
29. Доказать, что $T_{[\alpha[\beta}S_{\mu]\nu]}=\frac{1}{4}\left(T_{\alpha\beta}S_{\mu\nu}-T_{\alpha\mu}S_{\beta\nu}-T_{\nu\beta}S_{\mu\alpha}+T_{\nu\mu}S_{\beta\alpha}\right)$
30. Используя понятие инвариантов тензора, показать, что инварианты тензора электромагнитного поля имеют вид
$$\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2=\text{invar},$$
$$\left(\mathbf{EH}\right)^2=\text{invar}$$
31. Показать, что дивергенцию тензора второго ранга $T=T^{ij}e_i\otimes e_j$ можно представить в следующем виде:
$$\nabla\cdot T=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{mj}e_j\right)}{\partial x^m}.$$
32. Теорема Риччи.
33. Градиент тензора. Определение. Пример: градиент вектора.
34. Доказать, что градиент скалярного произведения двух векторов $\nabla\left(\boldsymbol{ab}\right)$ можно представить в виде:
$$\nabla\left(\boldsymbol{ab}\right)=\left(\nabla\otimes\boldsymbol{a}\right)\cdot\boldsymbol{b}+\left(\nabla\otimes\boldsymbol{b}\right)\cdot\boldsymbol{a}.$$
35. Доказать, что дивергенция от градиента тензора второго ранга является тензором второго ранга. Запишите его компоненты.

– примеры расчетно-графических работ:

1. Системы криволинейных координат.
2. Тороидальная система координат. Лапласиан скалярной функции.
3. Трёхмерные параболические координаты. Лапласиан скалярной функции.
4. Эллипсоидальные координаты. Лапласиан скалярной функции.
5. Параболоидальные координаты. Лапласиан скалярной функции.
6. Бицилиндрические координаты. Лапласиан скалярной функции.
7. Биполярные координаты. Лапласиан скалярной функции.
8. Параболические координаты. Лапласиан скалярной функции.

9. Конические координаты. Лапласиан скалярной функции.
10. Координаты эллиптического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
11. Координаты параболического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
12. Тороидальная система координат. Градиент скалярной функции.
13. Трёхмерные параболические координаты. Градиент скалярной функции.
14. Эллипсоидальные координаты. Градиент скалярной функции.
15. Параболоидальные координаты. Градиент скалярной функции.
16. Бицилиндрические координаты. Градиент скалярной функции.
17. Биполярные координаты. Градиент скалярной функции.
18. Параболические координаты. Градиент скалярной функции.
19. Конические координаты. Градиент скалярной функции.
20. Координаты эллиптического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
21. Координаты параболического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.

Оценочные материалы (фонд оценочных средств)

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

Номер задания	Правильный ответ (ключ)	Содержание вопроса/задания	Критерии оценивания заданий
Задания закрытого типа			
1		Выберете правильные утверждения: 1) Градиент скалярного поля – это векторное поле 2) Градиент скалярного поля – это ковекторное поле 3) Градиент векторного поля – это тензор второго ранга типа $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	Правильно выбран один ответ – 0.5 балла, Правильно выбраны все ответы – 1 балл

		4) Градиент векторного поля – это тензор второго ранга типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 5) Градиент векторного поля – это тензор второго ранга типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 6) Градиент векторного поля неопределен	
2		Градиент функции $f(x,y,z)=\sin(x+y+2z)$, заданной в декартовых координатах, в точке с координатами $(0,\pi,\pi/2)$ имеет вид: 1) $e_x+e_y+e_z$ 2) $e_x+e_y+2e_z$ 3) $-e_x+e_y+e_z$ 4) $-e_x+e_y-2e_z$ 5) $e_x+2e_y+2e_z$	Правильно выбран ответ – 1 балл
3		Угол между векторами $\boldsymbol{a}=\mathbf{e}_x+2\mathbf{e}_y-\mathbf{e}_z$ и $\boldsymbol{b}=\mathbf{e}_y-\mathbf{e}_z$ равен 1) $\pi/3$ 2) $\pi/6$ 3) π 4) $\pi/2$ 5) $\pi/4$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
4		Производная скалярного поля $f(x,y,z)=xz^2+2yz$ вдоль окружности, заданной параметрически $x=1+\cos t$, $y=\sin t-1$, $z=2$, в точке $M(1,0,2)$ равна 1) 2 2) 4 3) -3 4) -4 5) 0	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл

5		Чему равен угол между направлениями наискорейшего роста функций $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $f\left(x,y,z\right)=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ в точке $\left(1,0,1\right)$? 1) 0 2) $\pi/3$ 3) $\pi/6$ 4) $\pi/2$ 5) $\pi/4$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
6		Дивергенция векторного поля $\mathbf{A}=\lvert\mathbf{r}\rvert\mathbf{r}$ в точке $\left(3,0,4\right)$ равна 1) 10 2) 5 3) 15 4) 20 5) $4\sqrt{2}$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
7		В некотором базисе тензор T типа $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ имеет координаты $\left(T_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2&0&1\\5&3&2\\4&5&7\end{pmatrix}$. Метрический тензор имеет координаты $\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Чему равен след тензора T? 1) 12 2) 14 3) 9 4) 8 5) 15	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
8		В некотором базисе тензор T типа $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ имеет координаты $\left(T_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2&0&2\\5&3&1\\4&5&7\end{pmatrix}$. Метрический тензор имеет координаты	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл

		$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Чему равна компонента T^{13}? 1) 2 2) 1 3) 5 4) 7 5) 3	
9		Какие из представленных полей являются соленоидальными? 1) $\boldsymbol{a}=\left(yx^2+y^2\right)\mathbf{e}_x+\left(x^3-xy^2\right)\mathbf{e}_y$ 2) $\boldsymbol{a}=xy\mathbf{e}_x+xy\mathbf{e}_y-\left(x+y\right)z\mathbf{e}_z$ 3) $\boldsymbol{a}=\frac{x}{yz}\mathbf{e}_x+\frac{y}{xz}\mathbf{e}_y-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ln\left(z\right)\mathbf{e}_z$ 4) $\boldsymbol{a}=y^2\mathbf{e}_x-\left(x^3+y^3\right)\mathbf{e}_y+z\left(3y^2+1\right)\mathbf{e}_z$	Выбраны все правильные ответы – 1 балл
10		В прямоугольной декартовой системе координат задан вектор $\boldsymbol{a}=\left(1,4,-2\right)$. Найдите физическую компоненту $a_{1\phi}$ этого вектора в новых координатах: $q^1=x+y,$ $q^2=x-y,$ $q^3=2z$ 1) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ 2) $\frac{5}{2}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 5) $\frac{7}{2}$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
Задания открытого типа			

1	Записать уравнение поверхностей уровня поля $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{ax^2+by^2+cz^2}$, где постоянные a,b,c положительны.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) Эллипсоиды $\left(\frac{x}{\alpha/\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{y}{\alpha/\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{z}{\alpha/\sqrt{c}}\right)^2=1$. Здесь α – постоянная		
2	Вычислить поток векторного поля напряженности $\mathbf{E}=\frac{q\mathbf{r}}{r^3}$ точечного заряда q через сферу радиуса a с центром в точке заряда.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $4\pi q$		
3	Вычислить ротор векторного поля $\boldsymbol{V}=\left[\boldsymbol{a}\times\mathbf{r}\right]$ ($\boldsymbol{a}=\overrightarrow{const}$).	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $2\boldsymbol{a}$		
4	Записать в векторном виде следующее выражение: $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}a_k b_m c_n a_i$.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $\left(\left[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\right],\boldsymbol{c}\right)$ — смешанное произведение		
5	Найти дивергенцию вектора $\boldsymbol{a}=\left(x^2+y^2\right)z\mathbf{e}_x+xyz\mathbf{e}_y+y^2z\mathbf{e}_z$ в точке $\left(1,0,1\right)$.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) 3		
6	Найти поток радиус-вектора $\mathbf{r}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую объем V .	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $3V$		

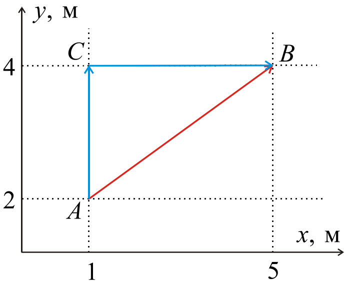
<table>
<tr><td rowspan="1">7</td><td>Найти лапласиан скалярного поля
$f\left(r\right)=5+2\frac{r}{a}-\frac{r^2}{2a^2}$
в области пространства, где $r\neq 0$.</td><td rowspan="2">Получен правильный ответ – 1 балл</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правильный ответ (ключ)
$\Delta f=\frac{4}{ar}-\frac{3}{a^2}$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Найдите напряженность электрического поля, потенциал которого имеет вид:
$\varphi=\left(\boldsymbol{a}\left[\boldsymbol{b}\times\mathbf{r}\right]\right)$</td><td rowspan="2">Получен правильный ответ – 1 балл</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правильный ответ (ключ)
$\mathbf{E}=\left[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right]$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Запишите выражение для квадрата расстояния ds^2 в цилиндрических координатах $\left(r,\varphi,z\right)$.</td><td>Получен правильный ответ – 1 балл</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правильный ответ (ключ)
$ds^2=\left(dr\right)^2+\left(rd\varphi\right)^2+\left(dz\right)^2$</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Запишите метрический тензор в сферических координатах $\left(r,\theta,\varphi\right)$.</td><td>Правильный ответ – 1 балл</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правильный ответ (ключ)
$G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$</td><td></td></tr>
</table>

ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.

Номер задания	Правильный ответ (ключ)	Содержание вопроса/задания	Критерии оценивания заданий
Задания закрытого типа			
1		Если поля $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ потенциальные, то поле $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$ является 1) вихревым, 2) потенциальным, 3) тождественно равным нулю, 4) ответ зависит от вида векторных полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
2		Пусть внутри объема V вектор $\boldsymbol{a}$ удовлетворяет условию $\mathrm{div}\boldsymbol{a}=0$, а на границе объема (поверхности S) – условию $a_n=0$. Тогда какое соотношение справедливо? 1) $\int\limits_V \boldsymbol{a}dV=\mathbf{0}$ 2) $\int\limits_V \boldsymbol{a}dV=\boldsymbol{a}V$ 3) $\int\limits_V \boldsymbol{a}dV=S\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$ 4) $\int\limits_V \boldsymbol{a}dV=\boldsymbol{a}\nabla V$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
3		Чему равен угол между направлениями наискорейшего роста функций $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $f(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ в точке $(1,0,1)$? 6) 0 7) $\pi/3$ 8) $\pi/6$ 9) $\pi/2$ 10) $\pi/4$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
4		Дивергенция векторного поля $\mathbf{A}=\lvert\mathbf{r}\rvert\mathbf{r}$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл

		в точке $(3,0,4)$ равна 6) 10 7) 5 8) 15 9) 20 10) $4\sqrt{2}$	
5		Даны два тензора своими компонентами в евклидовом пространстве с метрикой $G = diag(1,1,1)$: $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ и $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ Найти свертку этих тензоров. 1) 12 2) 0 3) 10 4) 4 5) 8	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
6		Чему равен ротор векторного поля $(\boldsymbol{c}\mathbf{r})\boldsymbol{b}$? Здесь $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$ – постоянные векторы, а $\mathbf{r}$ – радиус-вектор. 1) $[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}]$ 2) $(\boldsymbol{c}\boldsymbol{b})\mathbf{r}$ 3) $(\boldsymbol{c}\mathbf{r})\boldsymbol{b}$ 4) $[[\boldsymbol{c}\times\mathbf{r}]\times\boldsymbol{b}]$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
7		В некотором базисе тензор T типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ имеет координаты $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Даны также векторы $(x^k) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $(y^k) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ в этом же базисе. Чему равна свертка $T_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\beta}$? 1) 84 2) 62 3) 144 4) 162	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл

		5) 124	
8		В прямоугольной декартовой системе координат задан вектор $\boldsymbol{a} = (1, 4, -2)$. Найдите физическую компоненту $a_{1\phi}$ этого вектора в новых координатах: $q^1 = x + y,$ $q^2 = x - y,$ $q^3 = 2z$ 1) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ 2) $\frac{5}{2}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 5) $\frac{7}{2}$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
9		Дивергенция векторного поля $\mathbf{A} = \lvert\mathbf{r}\rvert\mathbf{r}$ в точке $(3, 0, 4)$ равна 1) 10 2) 5 3) 15 4) 20 5) $4\sqrt{2}$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
10		Даны векторы $\boldsymbol{a} = (1, 0, -1)$ и $\boldsymbol{b} = (2, 1, -1)$. Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ равна 1) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 2) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ 3) $2\sqrt{3}$ 4) $3\sqrt{3}$	Правильно выбран вариант ответа – 1 балл
Задания открытого типа			

1	Каковы поверхности уровня скалярного поля, определяемого потенциалом Юкавы $u = A\dfrac{\exp(-\mu r)}{r}$? Здесь μ, A – положительные постоянные, $r = \lvert\mathbf{r}\rvert$	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) Сферы в центром в начале координат.		
2	Рассмотрим движение частицы в плоскости Oxy под действием силы $\mathbf{F} = 2y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$ (компоненты силы выражены в ньютонах). Пусть сначала частица перемещается вдоль пути ACB, а потом вдоль пути AB. Найти отношение работ A_{ACB}/A_{AB} .  	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $A_{ACB}/A_{AB} = 17/15$		
3	Построить уравнение линий векторного поля $\mathbf{r} = 2a\left(x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y\right)$. Здесь a – постоянная.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) Параболы $y = c/x$ в плоскостях $z = const$		
4	Показать, что векторное поле $\boldsymbol{a} = \dfrac{f(r)}{r}\mathbf{r}$ является потенциальным, найти его потенциал.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $rot\left[\dfrac{f(r)}{r}\mathbf{r}\right] = \mathbf{0}$. Потенциал $u = -\int f(r)dr + const$		
5	Найти циркуляцию поля $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{a}\times\mathbf{r}]$ $(\boldsymbol{a} = \overrightarrow{const})$ по окружности единичного радиуса с центром в начале координат, лежащей в плоскости, нормаль которой образует равные углы с координатными осями.	Получен правильный ответ – 1 балл

Правильный ответ (ключ) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(a_x+a_x+a_z\right)$		
6	Найдите функции $f\left(r\right)$, для которых векторное поле $\boldsymbol{a}=f\left(r\right)\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки поля, будет соленоидальным.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $f\left(r\right)=1/r^3$		
7	Пространство заполнено электрическим зарядом с объёмной плотностью $\rho=\rho_0\exp\left(-\alpha r^3\right)$, где ρ_0 и α – положительные константы, а r – расстояние от центра данной системы. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию r .	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $E=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2}\left(1-\exp\left(-\alpha r^3\right)\right)$		
8	Дано пространство Минковского E_4 с метрикой $G=diag\left(1,-1,-1,-1\right)$. Тензор электромагнитного поля имеет вид: $F=\left(F_{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_y & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_z & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}$ Найти инварианты электромагнитного поля.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2=\text{invar},\qquad \left(\mathbf{EH}\right)^2=\text{invar}$		
9	Найти ротор векторного поля $\mathbf{A}=\frac{\left[\mathbf{p}\times\mathbf{r}\right]}{r^3}$. Здесь $\mathbf{p}$ – постоянный вектор, $r=\left\|\mathbf{r}\right\|$.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ)		

$\dfrac{3\mathbf{r}\left(\mathbf{pr}\right)-\mathbf{p}r^2}{r^5}$		
10	В некотором базисе тензор T типа $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ имеет координаты $\left(T_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\5 & 3 & 2\\4 & 5 & 7\end{pmatrix}$. Метрический тензор имеет координаты $\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Чему равен след тензора T^{ij}?	Правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) 9		
11	Пусть в декартовых координатах xyz дан цилиндр, уравнение поверхности которого имеет вид $y^2+z^2=4$. Напряжение среды этого цилиндра задано тензором $\sigma_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}3xy & 5y^2 & 0\\5y^2 & 0 & 2z\\0 & 2z & 0\end{pmatrix}$ Найти вектор напряжения в точке $P\left(2,1,\sqrt{3}\right)$ на площадке, касательной в этой точке к поверхности цилиндра.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $\boldsymbol{\sigma}=\dfrac{5}{2}\mathbf{e}_x+3\mathbf{e}_y+\sqrt{3}\mathbf{e}_z$		
12	Базис $\left\{\mathbf{e}_\alpha\right\}_{\alpha=1}^{3}$ образован единичными векторами, каждые два из которых образуют угол $\pi/3$. Найти базисные векторы взаимного базиса $\left\{\mathbf{e}^\alpha\right\}_{\alpha=1}^{3}$.	Получен правильный ответ – 1 балл
Правильный ответ (ключ) $\mathbf{e}^1=\dfrac{1}{2}\left(3\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3\right),\ \ \mathbf{e}^2=\dfrac{1}{2}\left(-\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3\right),\ \ \mathbf{e}^1=\dfrac{1}{2}\left(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3\right)$		