

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 09.07.2025 10:31:56  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:  
Руководитель ООП  
С.М. Дудаков  
2023 г.



**Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)**

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

Направление подготовки  
01.03.02 – Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
Искусственный интеллект и анализ данных

Для студентов 1,2 курсов очной формы обучения (1,2,3,4 семестры)

Составитель:  
к.ф.- м.н., доцент Голубев А.А.

Тверь, 2023

## I. Аннотация

### 1. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины является:

- развитие математической культуры, общей культуры мышления;
- владение математическими методами, которые используются при решении прикладных задач и во всех других изучаемых дисциплинах, в которых применяются любые математические методы.

Задачами освоения дисциплины являются:

- всестороннее изучение функций и функциональных зависимостей;
- изучение методов, задач и теорем математического анализа;
- изучение неопределённых и определённых интегралов, несобственных интегралов, интегралов, зависящих от параметра, кратных интегралов, криволинейных и поверхностных интегралов, рядов Фурье и их применение к решению задач прикладной математики.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Математический анализ» относится к разделу «Математический» обязательной части Блока 1.

Дисциплина находится в логической и содержательно-методической взаимосвязи и требует знаний и умений, формируемых в результате освоения школьной программы по элементарной математике и необходима как предшествующая для множества дисциплин, использующих математический аппарат, изучаемых в дальнейшем.

**3. Объём дисциплины:** 18 зачетных единиц, 648 академических часа, в том числе:

**контактная аудиторная работа:** лекции 187 часов, практические занятия 171 час;

**контактная внеаудиторная работа:** контроль самостоятельной работы 20 часов, в том числе курсовая работа 10 часов, расчетно-графическая работа 10 часов;

**самостоятельная работа:** 270 часов, в том числе контроль 142 часа.

### 4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

| Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)                                                           | Планируемые результаты обучения по дисциплине                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Код и наименование компетенции</i>                                                                                                         | <i>Индикаторы достижения компетентности в соответствии с учебным планом</i>                                                                                                                                             |
| ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических наук;<br>ОПК-1.2. Использует базовые знания в области математических наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их |

|     |                                                                                                                                                                                                     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| сти | использовании в профессиональной деятельности;<br>ОПК-1.3. Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических наук к решению задач профессиональной деятельности. |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**5. Форма промежуточной аттестации:** РГР (1 семестр), курсовая работа (3 семестр), экзамен (1, 2, 3, 4 семестры).

**6. Язык преподавания** русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий**

| Учебная программа –<br>наименование разделов<br>и тем                                                                                                                       | Всего<br>(час.) | Контактная работа (час.) |                                     |                              |                                     |                                                                       | Самостоятельная<br>работа, в том<br>числе<br>Контроль (час.) |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------------------|-------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                             |                 | Лекции                   |                                     | Практи-<br>ческие<br>занятия |                                     | Контроль самостоя-<br>тельной работы (в том<br>числе курсовая работа, |                                                              |
|                                                                                                                                                                             |                 | всего                    | в т.ч. практиче-<br>ская подготовка | всего                        | в т.ч. практиче-<br>ская подготовка |                                                                       |                                                              |
| Первый семестр                                                                                                                                                              |                 |                          |                                     |                              |                                     |                                                                       |                                                              |
| 1. Введение. Определе-<br>ние иррационального<br>числа. Сечения. Основ-<br>ная теорема Дедекин-<br>да. Границы числовых мно-<br>жеств. Функции нату-<br>рального аргумента. | 13              | 3                        |                                     | 3                            |                                     |                                                                       | 7                                                            |
| 2. Важнейшие классы<br>функций. Элементар-<br>ные, обратные, обратные<br>тригонометрические<br>функции. Суперпозиция<br>функций.                                            | 32              | 10                       |                                     | 10                           |                                     |                                                                       | 12                                                           |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |            |           |  |           |  |           |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|--|-----------|--|-----------|-----------|
| <b>3. Теория пределов.</b><br>Определение предела последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Теоремы о пределах. Свойства функций, имеющих конечный предел. Неопределённые выражения. Число $e$ . Принцип сходимости. Условия существования конечного предела. Классификация бесконечно малых и бесконечно больших. | 35         | 9         |  | 9         |  |           | 17        |
| <b>4. Непрерывность функции одной переменной.</b> Непрерывность и разрывы функции. Односторонняя непрерывность. Классификация разрывов. Непрерывность элементарных функций. Наибольшее и наименьшее значения функции. Понятие о равномерной непрерывности. Существование обратной функции.                                                             | 28         | 8         |  | 8         |  | 10        | 2         |
| <i>Всего</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <i>108</i> | <i>30</i> |  | <i>30</i> |  | <i>10</i> | <i>38</i> |
| <b>Второй семестр</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |           |  |           |  |           |           |
| <b>5. Дифференцирование функции одной переменной.</b> Производная и дифференциал первого порядка. Производная сложных и обратных функций. Производная и дифференциал высших порядков. Дифференциалы как источник приближённых формул.                                                                                                                  | 41         | 13        |  | 10        |  |           | 18        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |    |    |  |    |  |  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|--|----|--|--|----|
| <b>6. Основные теоремы дифференциального исчисления.</b> Теоремы о средних значениях. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора. Разложение произвольной функции. Формы дополнительного члена.                                                                                                                                           | 30 | 9  |  | 6  |  |  | 15 |
| <b>7. Исследование функций и построение графиков с помощью производных.</b> Условия постоянства, возрастания и убывания функции. Экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения. Направление вогнутости кривой и точки перегиба. Асимптоты кривой. Исследование функций и построение графиков. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя. | 38 | 13 |  | 10 |  |  | 15 |
| <b>8. Функции двух переменных.</b> Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных. Производные сложных и неявных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Экстремумы, наибольшее и наименьшее значения. Относительные (условные) экстремумы. Производная по направлению.                            | 40 | 15 |  | 12 |  |  | 13 |
| <b>9. Дифференциал дуги.</b> Декартовы и полярные координаты.                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 13 | 5  |  | 4  |  |  | 4  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |           |  |           |  |           |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|--|-----------|--|-----------|------------|
| <b>10. Комплексные числа. Комплексные функции действительного переменного.</b> Комплексные числа и их геометрическая интерпретация. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической формах. Определение и дифференцирование комплексной функции. Показательная функция и формула Эйлера.                                    | 18         | 9         |  | 6         |  |           | 3          |
| <i>Всего</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <i>180</i> | <i>64</i> |  | <i>48</i> |  |           | <i>68</i>  |
| <i>Итого за первый год обучения</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <i>288</i> | <i>94</i> |  | <i>78</i> |  | <i>10</i> | <i>106</i> |
| <b>Третий семестр</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |            |           |  |           |  |           |            |
| <b>11. Неопределенный интеграл.</b> Первообразная функция. Простейшие правила интегрирования. Интегрирование по частям и путём замены переменной. Интегрирование рациональных выражений. Разложение правильных дробей на простые. Интегрирование некоторых простейших иррациональных выражений. Подстановки Эйлера. Интегрирование тригонометрических функций. | 44         | 12        |  | 12        |  |           | 20         |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |           |  |           |  |           |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|--|-----------|--|-----------|-----------|
| <b>12. Определенный интеграл.</b> Определение. Суммы Дарбу. Классы и свойства интегрируемых функций. Свойства определённых интегралов. Свойства, выраженные равенствами и неравенствами. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и метод замены переменной. Интегрирование комплексной функции действительного переменного. | 44         | 12        |  | 12        |  |           | 20        |
| <b>13. Бесконечные ряды с постоянными членами.</b> Определение ряда и его суммы. Основные теоремы. Условия сходимости. Признаки сравнения, Коши, Даламбера, Раабе. Интегральный признак Коши. Знакопередающие ряды. Абсолютная сходимость. Степенные ряды. Признаки Абелья и Дирихле. Умножение рядов.                                                                         | 44         | 12        |  | 12        |  |           | 20        |
| <b>14. Бесконечные произведения.</b> Основные понятия и теоремы. Связь с рядами.                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 20         | 4         |  | 4         |  |           | 12        |
| <b>15. Разложение элементарных функций. Ряд Тейлора.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 28         | 5         |  | 5         |  | 10        | 8         |
| <i>Всего</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <i>180</i> | <i>45</i> |  | <i>45</i> |  | <i>10</i> | <i>80</i> |
| <b>Четвёртый семестр</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |            |           |  |           |  |           |           |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |    |   |  |   |  |  |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---|--|---|--|--|----|
| <b>16. Функциональные последовательности и ряды.</b> Равномерная и неравномерная сходимости. Условия и признаки равномерной сходимости. Функциональные свойства суммы ряда. Непрерывность суммы ряда. Почленный переход к пределу. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов. Непрерывность суммы степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. | 33 | 8 |  | 8 |  |  | 17 |
| <b>17. Интегралы, зависящие от параметра. Несобственные интегралы.</b> Дифференцирование и интегрирование интегралов, зависящих от параметра. Формула Лейбница. Определение интегралов с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Главные значения несобственных интегралов.                                                                  | 29 | 8 |  | 8 |  |  | 13 |
| <b>18. Кратные интегралы.</b> Двукратный интеграл. Вычисление двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле. Тройные интегралы и их вычисление. Элемент объема в криволинейных координатах. Цилиндрические и сферические координаты.                                                                                                                                | 31 | 8 |  | 8 |  |  | 15 |

|                                                                                                                                                                                                                               |            |            |  |            |  |           |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------|--|------------|--|-----------|------------|
| <b>19. Поверхностные интегралы.</b> Площадь поверхности. Интегралы по поверхности и формула Остроградского. Интегралы по определённой стороне поверхности.                                                                    | 31         | 8          |  | 8          |  |           | 15         |
| <b>20. Криволинейные интегралы.</b> Определение криволинейного интеграла первого и второго рода Площадь и криволинейный интеграл. Формула Грина. Формула Стокса. Независимость криволинейного интеграла от пути на плоскости. | 27         | 8          |  | 8          |  |           | 11         |
| <b>21. Ряды Фурье.</b> Ортогональность тригонометрических функций. Теорема Дирихле. Разложение в промежутке $[-\pi, \pi]$ . Разложение в промежутке $[0, \pi]$ . Периодические функции периода $2l$ .                         | 29         | 8          |  | 8          |  |           | 11         |
| <i>Всего</i>                                                                                                                                                                                                                  | <i>180</i> | <i>48</i>  |  | <i>48</i>  |  |           | <i>84</i>  |
| <i>Итого за второй год обучения</i>                                                                                                                                                                                           | <i>360</i> | <i>93</i>  |  | <i>93</i>  |  | <i>10</i> | <i>164</i> |
| <i>ИТОГО за весь период обучения</i>                                                                                                                                                                                          | <i>648</i> | <i>187</i> |  | <i>171</i> |  | <i>20</i> | <i>270</i> |

### III. Образовательные технологии

| Учебная программа –<br>наименование разделов<br>и тем | Вид занятия                  | Образовательные технологии                                |
|-------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1. Введение                                           | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач |
| 2. Важнейшие классы функций                           | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач |
| 3. Теория пределов                                    | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач |

|                                                                        |                              |                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4. Непрерывность функции одной переменной                              | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 5. Дифференцирование функции одной переменной                          | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 6. Основные теоремы дифференциального исчисления                       | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 7. Исследование функций и построение графиков с помощью производных    | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач<br>3. Выполнение РГР             |
| 8. Функции двух переменных                                             | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 9. Дифференциал дуги                                                   | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 10. Комплексные числа. Комплексные функции действительного переменного | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 11. Неопределенный интеграл                                            | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 12. Определенный интеграл                                              | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 13. Бесконечные ряды с постоянными членами                             | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 14. Бесконечные произведения                                           | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 15. Разложение элементарных функций. Ряд Тейлора                       | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач<br>3. Выполнение курсовой работы |
| 16. Функциональные последовательности и ряды                           | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 17. Интегралы, зависящие от параметра. Несобственные интегралы         | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач                                  |
| 18. Кратные интегралы                                                  | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала                                                      |

|                             |                              |                                                           |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------|
|                             |                              | 2. Решение задач                                          |
| 19. Поверхностные интегралы | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач |
| 20. Криволинейные интегралы | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач |
| 21. Ряды Фурье              | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала<br>2. Решение задач |

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: традиционные лекции, практические занятия в диалоговом режиме, выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

Дисциплина предусматривает выполнение контрольных работ, письменных домашних заданий.

#### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

Для проведения текущей и промежуточной аттестации:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности

**ОПК–1.1.** Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических наук.

Примеры типовых контрольных письменных заданий и их оценки.

1. Применяя формулу Грина преобразовать криволинейный интеграл  $\int_C y \left[ xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy + \sqrt{x^2 + y^2} dx$ , где контур  $C$  ограничивает конечную область  $S$ .

Всё сделано правильно – 4 балла.

- Правильно записана и применена формула Грина – 3 балла.
- Имеются неточности при формулировке окончательного вывода – минус 1-3 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

2. Найти первообразную функцию  $z(x, y)$ , если  $dz = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$ .

Всё сделано правильно – 3 балла.

- Имеются неточности при отыскании первообразной – минус 1-2 балла.

- Ничего не сделано – 0 баллов.

3. Учитывая, что для достаточно малых значений  $x$  имеет место равенство

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2} + o(x), \text{ выделить из бесконечно малой } o(x) \text{ главный член.}$$

Всё сделано правильно – 4 балла.

- Правильно выписано отношение, предел которого надо найти – 1 балл.

- Правильно найден предел – 2 балла.

- Имеются неточности при выделении главного члена – минус 1-3 балла.

- Ничего не сделано – 0 баллов.

**ОПК-1.2.** Использует базовые знания в области математических наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности.

Примеры типовых контрольных письменных заданий и их оценки.

1. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь, ограниченную

лемнискатой  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  и внешней частью окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ .

Всё сделано правильно – 5 баллов.

- Правильно записаны уравнения кривых в полярных координатах – 1 балл.

- Правильно изображена область интегрирования – 1 балл.

- Правильно записан повторный интеграл – 2 балла.

- Имеются неточности при нахождении площади – минус 1-4 балла.

- Ничего не сделано – 0 баллов.

2. Найти массу  $m = \iint_S \rho dS$  поверхности полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ ),

плотность  $\rho$  которой в каждой её точке  $M(x, y, z)$  равна  $\frac{z}{a}$

Всё сделано правильно – 5 баллов.

- Правильно указана связь между элементами площади в декартовых и сферических координатах – 2 балла.

- Правильно осуществлён переход к сферической системе координат – 2 балла.

- Имеются неточности при нахождении массы – минус 1-4 балла.

- Ничего не сделано – 0 баллов.

3. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь области, ограниченной астроидой  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = b \sin^3 t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ). Например, можно воспользоваться формулой  $S = \frac{1}{2} \int_l x dy - y dx$ .

$$S = \frac{1}{2} \int_l x dy - y dx.$$

Всё сделано правильно – 4 балла.

- Правильно совершен переход к определённому интегралу – 3 балла.

- В зависимости от допущенных неточностей минус – 1-3 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

**ОПК-1.3.** Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических наук к решению задач профессиональной деятельности.

Примеры типовых контрольных письменных заданий и их оценки.

1. Найти площадь части конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ , лежащую над плоскостью  $Oxy$  и отсечённую плоскостью  $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ .

Всё сделано правильно – 5 баллов.

- Правильно найдена проекция искомой фигуры на плоскость  $Oxy$  – 2 балла.
- Правильно записан повторный интеграл в полярной системе координат – 2 балла.
- Имеются неточности при нахождении площади поверхности – минус 1-4 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью (параметры предполагаются положительными)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $z > 0$ ).

Всё сделано правильно – 5 баллов.

- Правильно осуществлён переход к повторному интегралу – 2 балла.
- Правильно вычислен каждый из внутренних интегралов – 3 балла.
- В зависимости от допущенных неточностей минус – 1-3 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

3. Вычислить тройной интеграл

$\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$ , где граница области  $V$  задана уравнениями

$$z = xy, y = x, x = 1, z = 0.$$

Всё сделано правильно – 5 баллов.

- Правильно определена область интегрирования – 1 балл.
- Правильно осуществлён переход к повторному интегралу – 2 балла.
- Правильно вычислен каждый из внутренних интегралов – 2 балла.
- В зависимости от допущенных неточностей минус – 1-3 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1) Рекомендуемая литература

#### Основная литература:

1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник: в 2-х т. / Л.Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - Москва: Физматлит, 2009. - Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. - 400 с. - ISBN 978-5-9221-0184-4; [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82814>

2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник: в 2-х т. / Л.Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - Москва: Физматлит, 2010. - Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. - 425 с. - ISBN 978-5-9221-0185-1; [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82818>

3. Шершнев, В. Г. Математический анализ: учебное пособие / В. Г. Шершнев. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 288 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-005488-9. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1911157>

4. Пантелеев, А. В. Математический анализ: учебное пособие / А.В. Пантелеев, Н.И. Савостьянова, Н.М. Федорова. — Москва: ИНФРА-М, 2021. — 502 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1077332. - ISBN 978-5-16-016008-5. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1219350>

#### **Дополнительная литература:**

1. Гурьянова, К. Н. Математический анализ: учебное пособие / К. Н. Гурьянова, У. А. Алексеева, В. В. Бояршинов. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 332 с. — ISBN 978-5-7996-1340-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/66542.html>

2. Шипачев, В. С. Математический анализ. Теория и практика: учебное пособие / В. С. Шипачев. — 3-е изд. — Москва: ИНФРА-М, 2019. — 351 с. — (Высшее образование). - ISBN 978-5-16-010073-9. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/989800>

***Замечание.** Можно воспользоваться любым стереотипным изданием учебников, указанных авторов, независимо от года издания.*

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

Пакет символьной математики Maple.

Сайт ТвГУ: <http://homepages.tversu.ru/~s000154/MAPLE/maple.html>

***Замечание.** Можно воспользоваться любым стереотипным изданием учебников, указанных авторов, независимо от года издания.*

2) Программное обеспечение

| <b>Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 46<br/>(170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)</b> |                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Adobe Acrobat Reader DC - Russian                                                                                                          | бесплатно                                                                                         |
| Apache Tomcat 8.0.27                                                                                                                       | бесплатно                                                                                         |
| Cadence SPB/OrCAD 16.6                                                                                                                     | Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009 |
| GlassFish Server Open Source Edition 4.1.1                                                                                                 | бесплатно                                                                                         |
| Google Chrome                                                                                                                              | бесплатно                                                                                         |
| Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit)                                                                                               | бесплатно                                                                                         |
| JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3                                                                                                  | бесплатно                                                                                         |
| JetBrains PyCharm Edu 3.0                                                                                                                  | бесплатно                                                                                         |
| Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows                                                                                                 | Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022                                                          |
| Lazarus 1.4.0                                                                                                                              | бесплатно                                                                                         |
| Mathcad 15 M010                                                                                                                            | Акт предоставления прав ИС000000027 от 16.09.2011                                                 |
| MATLAB R2012b                                                                                                                              | Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012                                                  |
| Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО                                                                                      | бесплатно                                                                                         |
| ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО                                                                                                              | бесплатно                                                                                         |
| MiKTeX 2.9                                                                                                                                 | бесплатно                                                                                         |
| MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK                                                                                                               | бесплатно                                                                                         |
| NetBeans IDE 8.0.2                                                                                                                         | бесплатно                                                                                         |
| NetBeans IDE 8.2                                                                                                                           | бесплатно                                                                                         |
| Notepad++                                                                                                                                  | бесплатно                                                                                         |
| Oracle VM VirtualBox 5.0.2                                                                                                                 | бесплатно                                                                                         |
| Origin 8.1 Sr2                                                                                                                             | договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»                                           |
| Python 3.1 pygame-1.9.1                                                                                                                    | бесплатно                                                                                         |
| Python 3.4 numpy-1.9.2                                                                                                                     | бесплатно                                                                                         |
| Python 3.4.3                                                                                                                               | бесплатно                                                                                         |
| Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64-bit)                                                                                                      | бесплатно                                                                                         |
| WCF RIA Services V1.0 SP2                                                                                                                  | бесплатно                                                                                         |
| WinDjView 2.1                                                                                                                              | бесплатно                                                                                         |
| R Studio                                                                                                                                   | бесплатно                                                                                         |
| Anaconda3 2019.07 (Python 3.7.3 64-bit)                                                                                                    | бесплатно                                                                                         |

### 3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

| № п/п | Вид информационного ресурса | Наименование информационного ресурса | Адрес (URL) |
|-------|-----------------------------|--------------------------------------|-------------|
|-------|-----------------------------|--------------------------------------|-------------|

|     |                                 |                                     |                                                                                                                                             |
|-----|---------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.  | Электронно-библиотечная система | «Университетская библиотека онлайн» | <a href="https://biblioclub.ru">https://biblioclub.ru</a>                                                                                   |
| 2.  | Электронно-библиотечная система | IPR SMART                           | <a href="https://www.iprbookshop.ru/">https://www.iprbookshop.ru/</a>                                                                       |
| 3.  | Электронно-библиотечная система | «ЮРАЙТ»                             | <a href="https://urait.ru/">https://urait.ru/</a>                                                                                           |
| 4.  | Электронно-библиотечная система | «Лань»                              | <a href="http://e.lanbook.com">http://e.lanbook.com</a>                                                                                     |
| 5.  | Электронно-библиотечная система | «Знаниум»                           | <a href="https://znanium.com/">https://znanium.com/</a>                                                                                     |
| 6.) | Электронно-библиотечная система | ЭБС ТвГУ                            | <a href="http://megapro.tversu.ru/megapro/Web">http://megapro.tversu.ru/megapro/Web</a>                                                     |
| 7.  | Научная электронная библиотека  | eLIBRARY.RU (подписка на журналы)   | <a href="https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp?">https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp?</a> |
| 8.  | Репозиторий                     | Репозиторий ТвГУ                    | <a href="http://eprints.tversu.ru">http://eprints.tversu.ru</a>                                                                             |

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Виртуальная образовательная среда ТвГУ (<http://moodle.tversu.ru>)

Научная библиотека ТвГУ (<http://library.tversu.ru>)

Пакет символьной математики Maple.

Сайт ТвГУ: <http://homepages.tversu.ru/~s000154/MAPLE/maple.html>

## **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 баллов (30 баллов - 1-й модуль и 30 баллов - 2-й модуль).

Обучающемуся, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55–57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

Методические указания представлены в виде содержательного разбора решения типовых задач, возникающих при освоении дисциплины. Самостоятельная работа заключается в освоении теоретического материала лекций и решения задач по темам рабочей программы.

## ***Первый семестр***

### **Задачи для самостоятельного решения**

(методические указания даны ниже в разделе «примеры содержательного описания решения типовых задач» после вопросов для подготовки к экзамену)

**Доказать, что  $\lim a_n = a$  (указать  $N(\varepsilon)$ )**

- |                                                           |                                             |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1. $a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{2};$ | 2. $a_n = \frac{23-4n}{2-n}, \quad a = 4;$  |
| 3. $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \frac{3}{2};$      | 4. $a_n = \frac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2;$  |
| 5. $a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\frac{3}{5};$ | 6. $a_n = \frac{2n^3}{n^3-2}, \quad a = 2.$ |

### ***Вычислить предел числовой последовательности***

- |                                                                               |                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}.$ | 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$ |
| 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}).$             | 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3n+2} - n).$                       |

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1+5+9+13+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right].$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right].$$

**Вычислить предел функции**

$$1. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^{3x} - 2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x - 7x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{-7x}}{2x - \operatorname{tg} x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}.$$

**Определить значения следующих выражений**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\cos x)}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad (a > 0).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}.$$

### Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

**1-я контрольная точка.** Темы № 1-2. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

**2-я контрольная точка.** Темы № 2-4. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

**Экзамен 40 баллов.**

Наибольшее количество баллов за семестр равно 100.

### Вопросы для подготовки к экзамену

Определение иррационального числа. Основная теорема (Дедекинда).

Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (указать  $N(\varepsilon)$ ), если  $a_n = \frac{1-2n^2}{2+6n^2}$ ,  $a = -\frac{1}{3}$ .

Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \ln a$  ( $a > 0$ ). Указание. Ввести новую переменную

$y = a^{\frac{1}{n}} - 1$  и учесть, что  $y \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Воспользоваться тем, что  $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ , т. е.

вторым замечательным пределом.

Границы числовых множеств.

Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+5}}{1+2+3+\dots+n}$ . Учесть, что сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ .

Пусть  $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$  ( $a > 0$ ). Показать, что  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ . Определение понятия функции. Важнейшие классы функций.

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}$ . Указание. Например, ввести новую переменную  $t = x - 10$  и учесть, что  $t \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 10$ .

Показать, что всякую функцию  $f(x)$ , определённую в симметричном интервале  $(-l, l)$ , можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций.

Числовая последовательность. Определение предела последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x}$ . Учесть, что  $a^x = e^{x \ln a}$  и асимптотические разложения  $e^\alpha = 1 + \alpha + O(\alpha^2)$ ,  $\sin \alpha = \alpha + O(\alpha^3)$  при достаточно малых  $\alpha$ , т. е. при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Найти значение выражения  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$ . Указание. Представить дробь  $\frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$  в виде  $\frac{(x^{100} - x) - (x - 1)}{(x^{50} - x) - (x - 1)}$  и разделить числитель и знаменатель дроби на  $(x - 1)$ .

Определение предела функции (два). Односторонние пределы.

Доказать неравенство  $\left| \sin \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k$ , если  $0 \leq x_k \leq \pi$  для любого  $k$ . Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right]$ .

Найти сумму всех биномиальных коэффициентов  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$ , где  $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  — число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  элементов.

Указание. Воспользоваться формулой Ньютона  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ .

Доказать (найти  $\delta(\varepsilon)$ ), что  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6$ .

Предельный переход в равенстве и неравенстве. Леммы о бесконечно малых.

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$ . Указание. Умножить числитель и знаменатель дроб

на выражение, сопряжённое числителю. Воспользоваться, например, тем, что при нахождении предела отношения двух бесконечно малых каждую из них можно заменить любой эквивалентной ей бесконечно малой

Доказать, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  (найти  $\delta(\varepsilon)$ ), если  $f(x) = 5x^2 + 5$ ,  $x_0 = 8$ .

Неопределённые выражения.

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$ . Указание. Например, ввести новую переменную

$t = x - 3$  и учесть, что  $t \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 3$ .

Доказать, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  (найти  $\delta(\varepsilon)$ ), если  $f(x) = 4x^2 + 6$ ,  $x_0 = 7$ .

Предел монотонной функции.

Является ли равномерно непрерывной функция  $f(x) = x^2$  на интервале  $(-l, l)$ , где  $l$  – любое, сколь угодно большое число?

Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$ . Указание. Выделить в числителе и знаменателе сомножитель  $(x + 1)$ .

Число  $e$ .

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа  $n$  справедливо равенство:  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ .

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$ . Учесть, что  $\sin x \sim x$ ,  $\cos x \sim 1$ , для достаточно малых значений  $x$ .

Частичные последовательности. Лемма Больцано - Вейерштрасса.

Определить область существования функции  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$ .

Вычислить предел числовой последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}$ . Указание. Воспользоваться вторым замечательным пределом.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ .

Условие существования конечного предела.

Пусть  $x \rightarrow +\infty$  и  $n > 0$ . Показать, что  $C \cdot O(x^n) = O(x^n)$ ,  $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$  ( $n > m$ ),  $O(x^n) O(x^m) = O(x^{n+m})$ .

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ . Указание. Выделить в числителе и знаменателе сомножитель  $(x - 1)$ .

Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Выделение главной части.

Учитывая, что  $\sqrt{1+x}-1 = \frac{1}{2}x + o(x^2)$  выделить главную часть из бесконечно малой  $o(x^2)$ . Показать, что  $\sqrt{1+x}-1$  можно представить в виде  $\frac{1}{2}x + Ax^2 + o(x^3)$ , т. е. найти, чему равно  $A$ .

Определение непрерывности в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Примеры.

Исследовать на непрерывность и построить график функции  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n}$  ( $x > 0$ ). Указание. Рассмотреть случаи  $0 < x < 1$ ,  $x = 1$  и  $x > 1$ .

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^x - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}$ . Указание. Ввести новую переменную  $t = x - \pi$  и учесть, что  $t \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pi$ .

Односторонняя непрерывность. Классификация разрывов. Примеры.

Функция  $f(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$  теряет смысл при  $x=0$ . Определить число  $f(0)$ , чтобы  $f(x)$  была непрерывна при  $x=0$ .

Непрерывность и разрывы монотонной функции. Суперпозиция непрерывных функций.

Пусть  $x \rightarrow +\infty$  и  $n > 0$ . Доказать, что  $2x^3 - 3x^2 + 1 = o(x^3)$ ,  $\frac{x+1}{x^2+1} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$ . Учесть, например, что  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ ,  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ .

Свойства непрерывных функций. Первая и вторая теоремы Больцано – Коши.

1) Если  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ ; 2) если  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$  и  $A \neq B$  то, что из этого следует и каким свойствам должна удовлетворять функция  $f(x)$ .

Найти предел  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg(x+h) + \lg(x-h) - 2 \lg x}{h^2}$ . Учесть, что при  $a > 0$  и  $b > 0$   $\lg a + \lg b = \lg ab$ ,  $\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$ , и формулу сокращённого умножения  $(x-h)(x+h) =$

$x^2 - h^2$ , т. е. что  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg(x+h) + \lg(x-h) - 2 \lg x}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg \left( \frac{x^2 - h^2}{x^2} \right)}{h^2}$ .

Доказать, что функция  $y = x^3$  равномерно непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

Теорема об ограниченности функции (первая теорема Вейерштрасса). Если функция  $f(x)$  ..., то она ограничена.

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности  $x_n = 1 + \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)}$ . Указание. Показать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $N = N(\varepsilon)$ , такое, что неравенство  $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$  выполняется для всех  $n > N$  и любого натурального числа  $p$ .

Доказать эквивалентность бесконечно малых:  $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$ . Указание.

Найти, чему равен предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\frac{1}{2}x^3}$ .

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$ . Указание. Например, умножить числитель и знаменатель на выражения, сопряженные знаменателю и числителю соответственно и воспользоваться, например, тем, что при нахождении предела отношения двух бесконечно малых каждую из них можно заменить любой эквивалентной ей бесконечно малой.

Доказать, что  $a^x - 1 \sim x \ln a$  ( $a > 0$ ) для достаточно малых значений  $x$ .

Указание. Показать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$ . Воспользоваться новой переменной  $y = a^x - 1$ , учитывая, что  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ .

Понятие о равномерной непрерывности.

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$ . Например, воспользоваться одной из формул сокращённого умножения и первым замечательным пределом.

Доказать, что функция  $y = x^3$  равномерно непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

Теорема Кантора.

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$ . Учесть, что  $\operatorname{sh} x \sim x$ ,  $\sin x \sim x$ , для достаточно малых значений  $x$ .

Доказать, что функция  $f(x) = \sin x$  непрерывна при любом значении  $x = x_0$ .

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$ . Указание. Для начала умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю.

Для функции  $y = f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  найти обратную функцию  $x = g(y)$ , т. е. найти  $x$  из уравнения  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

Непрерывность элементарных функций.

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sin 3\pi x}$ . Указание. Использовать новую переменную  $t = x - 1$  и учесть, что  $t \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 1$ .

Является ли равномерно непрерывной функция  $f(x) = x^3$  на интервале  $(-l, l)$ , где  $l$  – любое, сколь угодно большое число?

Доказать, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  (найти  $\delta(\varepsilon)$ ), если  $f(x) = -5x^2 - 8$ , а  $x_0 = 2$ .

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ . Указание. «Вынести»  $e^x$  за знак радикала и воспользоваться тем, что  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ .

### Примеры содержательного описания решения типовых задач

1. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (указать  $N(\varepsilon)$ ), если  $a_n = \frac{1-2n^2}{2+6n^2}$  и  $a = -\frac{1}{3}$ .

**Решение.** По определению предела для любого сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$  должен существовать такой номер  $N(\varepsilon)$ , что для всех  $n > N$  должно выполняться неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Заметим, что если речь идёт об установлении факта стремления последовательности  $a_n$  к пределу  $a$ , то совсем не обязательно указывать наименьшее значение  $N$ , для которого выполняется неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$  при  $n > N$ . Важен сам факт существования такого номера  $N$ .

Рассмотрим разность  $|a_n - a| = \left| \frac{1-2n^2}{2+6n^2} + \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3-6n^2+2+6n^2}{3(2+6n^2)} \right| = \frac{5}{6(1+3n^2)} < \frac{6}{6(1+3n^2)} = \frac{1}{1+3n^2} < \frac{1}{3n^2} < \varepsilon$ . Следовательно, должно выполняться неравенство  $n^2 > \frac{1}{3\varepsilon}$ , т. е. за  $N$  можно взять целую часть числа  $\frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}}$ .

Тем самым утверждение доказано.

Следует заметить, что  $N$  можно было бы найти и из неравенства  $\frac{5}{6(1+3n^2)} < \varepsilon$ . Но вовсе не обязательно находить наименьшее возможное значение  $N$ . Важно, что такой номер в принципе существует.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1+5+9+13+\dots+(3n-1)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right]; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+5}}{1+3+5+\dots+(3n-1)}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)!}; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \right). \end{aligned}$$

**Решение.** Напомним, что сумма конечного числа членов арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число

слагаемых, т. е. сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии  $a_1, a_2, \dots$  вычисляется по формуле  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ .

а) Числитель первой дроби является суммой  $n$  членов арифметической прогрессии с членами  $1, 5, 9, 13, \dots, 4n-3$ , поэтому с учётом указанной формулы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1+5+9+13+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n-1)n}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right] =$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n - 4n^2 - 4n - n - 1}{2(n+1)} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+1}{2(n+1)} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 7 + \frac{1}{n} \right)}{2n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{1}{n}}{2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} =$   
 $-\frac{7}{2}.$

б) Учитывая, что знаменатель дроби является суммой  $n$  членов арифметической прогрессии  $1, 3, \dots, 2n-1$ , имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+5}}{1+3+5+\dots+(2n-1)} =$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{1+\frac{5}{n^3}} - n^2 \sqrt{3+\frac{5}{n^4}}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sqrt[3]{1+\frac{5}{n^3}} - \sqrt{3+\frac{5}{n^4}} \right) = -\sqrt{3}.$

в) Символ  $n!$  означает произведение последовательных натуральных чисел от 1 до  $n$  включительно, т. е.  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Следует заметить, например, что  $n! = n(n-1)!$ . Итак,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! \frac{3n}{3n} + (3n)!(3n+1)}{(3n)!(n-1)}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)! \frac{1}{3n} + (3n)!(3n+1)}{(3n)!(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)! \left( \frac{1}{3n} + 3n+1 \right)}{(3n)!(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3n^2} + 3 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 3.$

г) Выражение  $\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots$ , предел которого надо найти, можно переписать в виде  $2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{8}} \dots$ . Как известно из элементарной математики, при умножении чисел с одинаковыми основаниями показатели степени складываются, т. е.  $2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{8}} \dots = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots} = 2^1 = 2.$

В данном случае степень числа два есть не что иное, как сумма  $n$  членов геометрической прогрессии со знаменателем, равным  $\frac{1}{2}$ . Так как сумма

$n$  членов геометрической прогрессии  $b_1, b_2, \dots$  со знаменателем  $q$  равна  $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ , то  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$ .

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1 - \frac{1}{2^n}} = 2$ .

3. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}$ .

**Решение.** Переходя к половинному углу  $\frac{x}{2}$ , пользуясь известными формулами элементарной тригонометрии  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$  и  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \text{найдем: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{px}{2} + 2 \sin \frac{px}{2} \cos \frac{px}{2}} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{px}{2} \left( \sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2} \right)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{px}{2}}{\sin \frac{px}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2}} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Заметим, что при нахождении предела воспользовались первым замечательным пределом  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ .

Следует отметить, что тот же предел можно найти и по-другому, если воспользоваться асимптотическими разложениями, т. е. тем, что для достаточно малых значений  $\alpha$ :  $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + O(\alpha^4)$ ,  $\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + O(\alpha^5)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + O(x^3) - 1 + O(x^2)}{1 + px + O(x^3) - 1 + O(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + O(x^2)}{px + O(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + O(x)}{p + O(x)} \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Было учтено, что  $O(x^3) + O(x^2) = O(x^2)$ . Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{O(x^3) + O(x^2)}{O(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 x^3 + C_2 x^2}{C_3 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{C_1}{C_3} x + \frac{C_2}{C_3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} [O(x) + C] = C. \text{ Здесь}$$

$C, C_1, C_2, C_3$  — отличные от нуля постоянные.

Если в этом же примере использовать символ « $o$ », то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + o(x^2) - 1 + o(x)}{1 + px + o(x^2) - 1 + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{px + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{o(x)}{x}}{p + \frac{o(x)}{x}} =$$

$$\frac{1}{p}, \text{ т. к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

Было учтено, что  $o(x^2) + o(x) = o(x)$ . Действительно,  $o(x^2) + o(x) = \beta_1(x)x^2 + \beta_2(x)x = [\beta_1(x)x + \beta_2(x)]x = \beta(x)x = o(x)$ . Здесь  $\beta_1(x), \beta_2(x), \beta(x)$  — функции, стремящиеся к нулю при  $x \rightarrow 0$ .

4. Определить области существования (определения) следующих функций:

а)  $y = \sqrt{3x - x^3}$ ; б)  $y = \lg[\cos(\lg x)]$ ; в)  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$ ;

г)  $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ .

**Решение**

а) Функция определена, если подкоренное выражение неотрицательно. Следовательно, должно выполняться неравенство  $3x - x^3 \geq 0$  или, что то же самое,  $x(x^2 - 3) \leq 0$ . Если записать последнее неравенство в виде  $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \leq 0$  и воспользоваться методом интервалов, то сразу найдём, что функция  $y$  существует при значениях  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}]$ .

б) Функция определена если  $x > 0$  и  $\cos(\lg x) > 0$ . Из последнего неравенства следует, что должно выполняться двойное неравенство  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \lg x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , откуда, потенцируя, найдём  $10^{2\pi k - \frac{\pi}{2}} < x < 10^{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$ . Было учтено, что  $\cos t > 0$ , если  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

в) Функция определена для всех значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $\left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1$ . Это означает, что  $-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1$ . Таким образом, необходимо

найти решение системы двух неравенств 
$$\begin{cases} \frac{2x}{1+x} + 1 \geq 0, \\ \frac{2x}{1+x} - 1 \leq 0. \end{cases}$$
 Она эквивалентна си-

стеме 
$$\begin{cases} \frac{3x+1}{1+x} \geq 0, \\ \frac{x-1}{1+x} \leq 0. \end{cases}$$
 Используя метод интервалов из первого неравенства,

найдем, что  $x < -1$  или  $x \geq -\frac{1}{3}$ , а из второго неравенства —  $-1 < x \leq 1$ . Следовательно, значения  $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$  удовлетворяют обоим неравенствам.

г) Функция существует, когда оба подкоренных выражения неотрицательны, т. е.  $\begin{cases} \sin 2x \geq 0, \\ \sin 3x \geq 0. \end{cases}$  Из первого неравенства системы следует, что

$2\pi k \leq 2x \leq \pi + 2\pi k$  или  $\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k$ . Из второго —  $2\pi n \leq 3x \leq \pi + 2\pi n$  или  $\frac{2\pi}{3}n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}n$ , где  $k$  и  $n$  — целые числа.

Заметим, что по условию задачи  $0 \leq x \leq 2\pi$ , поэтому  $k$  может принимать только значения 0 или 1, а  $n$  — 0, 1, 2.

Итак, при  $k=0$  и  $n=0$  значения независимой переменной  $x$  удовлетворяют соответственно неравенствам  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  и  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ . Одновременно эти два неравенства выполняются при  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ .

При остальных значениях  $k$  и  $n$  промежутки значений  $x$ , в которых  $\sin 2x \geq 0$  и  $\sin 3x \geq 0$  пересекаются только при  $k=1$ , когда  $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  и при  $n=2$ , когда  $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$ . Одновременно эти два неравенства выполняются при  $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .

Таким образом, функция  $y$  определена в промежутке  $0 \leq x \leq 2\pi$ , если независимая переменная принимает значения  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  или  $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .

## **Второй семестр**

### **Задачи для самостоятельного решения**

(методические указания даны ниже в разделе «примеры содержательного описания решения типовых задач» после вопросов для подготовки к экзамену)

**Исходя из определения производной, найти  $f'(0)$**

$$1. f(x) = \sqrt{1 + \ln(1 + x^2 \sin \frac{1}{x})^2} - 1, \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

$$2. f(x) = \sin(e^{x^2 \sin \frac{5}{x}} - 1) + x, \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

$$3. f(x) = 3^{x^2 \sin \frac{2}{x}} - 1 + 2x, \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

$$4. f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}, \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

$$5. f(x) = x^2 \cos \frac{4}{3x} + \frac{x^2}{2}, \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

$$6. f(x) = \operatorname{tg}(2^{x^2 \cos(\frac{1}{8x})} - 1 + x), \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

*Найти производную*

$$1. y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}). \quad 2. y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}.$$

$$3. y = \frac{\cos(\sin 5) \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}.$$

$$4. y = \frac{\cos(\ln 7) \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}.$$

$$5. y = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \frac{2 + \sqrt{5} \operatorname{th} x}{2 - \sqrt{5} \operatorname{th} x}.$$

$$6. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\operatorname{th} x}}{1 - \sqrt{\operatorname{th} x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} x}.$$

$$7. y = x^{e^{\cos x}}.$$

$$8. y = x^{e^{\sin x}}.$$

*Найти производную первого порядка  $y'_x$  от функции, заданной параметрически*

$$1. \begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin(\frac{t^3}{3} + t). \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \operatorname{tg} \sqrt{1 + t}. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln \frac{\sqrt{1 + t^2}}{1 + t}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = (\operatorname{arcsin} t)^2, \\ y = t / \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = 1 / \sin^2 t. \end{cases}$$

*Найти производную второго порядка  $y''_{x^2}$  от функции, заданной параметрически*

$$1. \begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{1 + t^2}. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \frac{2}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = e^t, \\ y = \operatorname{arcsin} t. \end{cases}$$

*Построить графики функций с помощью производной первого порядка*

$$1. y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}.$$

$$2. y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}.$$

$$3. y = \frac{12\sqrt[3]{6(x-2)^2}}{x^2 + 8}.$$

$$4. y = -\frac{12\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{x^2 + 2x + 9}. \quad 5. y = \sqrt[3]{x(x+2)}. \quad 6. y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}.$$

*Найти наибольшее и наименьшее значение функций на заданных отрезках*

$$\begin{aligned} 1. y &= x^2 + \frac{16}{x} - 16, \quad x \in [1, 4]. & 2. y &= 4 - x - \frac{4}{x^2}, \quad x \in [1, 4]. \\ 3. y &= \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1, \quad x \in [0, 6]. & 4. y &= \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}, \quad x \in [-3, 3]. \\ 5. y &= 2\sqrt{x} - x, \quad x \in [0, 4]. & 6. y &= x - 4\sqrt{x} + 5, \quad x \in [1, 9]. \end{aligned}$$

*Провести полное исследование функций и построить их графики*

$$\begin{aligned} 1. y &= \frac{x^3 + 4}{x^2}. & 2. y &= \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}. & 3. y &= \frac{2}{x(x+2)}. \\ 4. y &= \sqrt[3]{(2-x)(x^2 - 4x + 1)}. & 5. y &= \sqrt[3]{(2+x)(x^2 + 4x + 1)}. & 6. y &= \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

*Исследовать на экстремум функции двух переменных*

$$\begin{aligned} 1. z &= x^2 + (y-1)^2. & 2. z &= x^2 - xy + y^2 - 2x + y. & 3. z &= x^2 y^3 (6 - x - y). \\ 4. z &= x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - 2y^2. & 5. z &= xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, b > 0). \\ 6. z &= x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

*Найти точки условного экстремума следующих функций*

$$\begin{aligned} 1. z &= xy, \text{ если } x + y = 1. & 2. z &= \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \text{ если } x^2 + y^2 = 1. \\ 3. z &= x^2 + y^2, \text{ если } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. & 4. z &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \text{ если } x^2 + y^2 = 1. \\ 5. u &= xy^2 z^3, \quad x + 2y + 3z = a \quad (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0). \\ 6. u &= xyz, \text{ если } x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0. \end{aligned}$$

*Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции  $\varphi$  и  $\psi$*

$$1. z = x + \varphi(x, y). \quad 2. z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right). \quad 3. z = \varphi(x) + \psi(y).$$

4.  $z = \varphi(x) \cdot \psi(y)$ . 5.  $z = x\varphi(\frac{x}{y}) + y\psi(\frac{x}{y})$ . 6.  $z = \varphi(xy) + \psi(\frac{x}{y})$ .

### Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

**1-я контрольная точка.** Темы № 5 – 7. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

**2-я контрольная точка.** Темы № 8 – 10. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

**Экзамен 40 баллов.**

Наибольшее количество баллов за семестр равно 100.

### Вопросы для подготовки к экзамену

- Производная и дифференциал первого порядка.
- Производные простейших функций.
- Производная сложных и обратных функций.
- Производные и дифференциалы высших порядков.
- Параметрическое дифференцирование.
- Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля).
- Формулы Лагранжа и Коши.
- Формула Тейлора для многочлена и произвольной функции.
- Исследование функций с помощью производных.
- Экстремум функции, наибольшее и наименьшее значение.
- Исследование функций и построение графиков.
- Направление вогнутости кривой и точки перегиба.
- Асимптоты кривой.
- Раскрытие неопределённостей с помощью правила Лопиталя.
- Функция двух переменных. Основные понятия.
- Частные производные и полный дифференциал функции двух независимых переменных.
- Производные сложных и неявных функций.
- Производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных.
- Необходимый признак экстремума функции двух независимых переменных. Достаточные условия экстремума.
- Производная по направлению. Градиент функции.
- Дифференциал дуги.
- Комплексные числа и их геометрическая интерпретация.
- Имеет ли функция  $y = \cos x + \operatorname{ch} x$  экстремум при значении  $x = 0$ ? (Исследовать с помощью производных высших порядков).

Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных  $z = x^2 + (y-1)^2$ .

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Извлечь корень  $\sqrt[3]{i}$ .

Извлечь корень  $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$ .

Исследовать на экстремум функцию  $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$  ( $x > 0, y > 0$ ).

Найти точки условного экстремума функции  $z = x^2 + y^2$ , если  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

Вводя новую переменную  $x = e^t$  преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение:  $x^2 y'' + xy' + y = 0$ . Учесть, что  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ ,  $y''_{x^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{y'_t}{x'_t} \right) \cdot t'_x$  и

то, что  $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ .

Показательная функция и формула Эйлера.

Относительные (условные) экстремумы.

Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$  ( $x > 0, y > 0$ ).

Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить  $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$ . Указание. Рассмотреть функцию  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  и учесть, что  $f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$ .

### Примеры содержательного описания решения типовых задач

1. Найти производную функции  $y(x) = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$ .

**Решение.** Если в функцию несколько раз входит одно и то же выражение, то есть смысл ввести вспомогательную переменную, равную этому выражению, и дифференцировать исходную функцию как сложную функцию. В этом случае повторяющееся выражение надо будет дифференцировать только один раз.

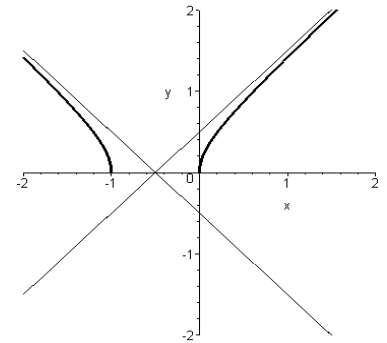
Пусть  $t = e^x$ , тогда  $y'_x = y'_t \cdot t'_x$ . С учетом замены исходная функция примет вид  $y(t) = \ln t - \ln(2 + t + 2\sqrt{t^2 + t + 1})$ , следовательно,

$$y'_t = \frac{1}{t} - \frac{1 + \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t+1}}}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{(2+t)\sqrt{t^2+t+1} + 2(t^2+t+1) - t\sqrt{t^2+t+1} - 2t^2 - t}{t(2+t+2\sqrt{t^2+t+1})\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$\frac{2\sqrt{t^2+t+1} + t + 2}{t(2+t+2\sqrt{t^2+t+1})\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{1}{t\sqrt{t^2+t+1}} \text{ и } y'_x = t'_x \cdot y'_t = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}.$$

2. Найти асимптоты и построить график функции  $y = \sqrt{x^2 + x}$ .

**Решение.** Функция определена для всех значений  $x$ , не принадлежащих интервалу  $(-1, 0)$ . Проверим, имеются ли асимптоты. Угловой коэффициент наклонной асимптоты  $Y = ax + b$  определяется как предел отношения  $\frac{y}{x}$ , т. е.  $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x}$ . В данном случае  $\frac{y}{x} =$



$\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x}$ . Поэтому  $a = 1$  при  $x \rightarrow +\infty$  и

$\tilde{a} = -1$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Свободный член  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}, \quad \tilde{b} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - \tilde{a}x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = -\frac{1}{2}.$$

Функция принимает положительные значения во всей области определения, за исключением только точек  $x = -1$  и  $x = 0$ , где она обращается в нуль. Первая производная  $y'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$  стремится к минус бесконечности при  $x \rightarrow -1-0$  и к плюс бесконечности при  $x \rightarrow +0$ . Вторая производная

$$y''(x) = -\frac{1}{4(x^2+x)^{3/2}} < 0 \text{ для всех значений } x, \text{ принадлежащих области опре-}$$

деления функции, и, следовательно, график функции вогнут вниз.

Таким образом, график исследуемой функции (рисунок) имеет две различные асимптоты при стремлении  $x$  к плюс или минус бесконечности, а именно:  $Y = x + \frac{1}{2}$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $\tilde{Y} = -x - \frac{1}{2}$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

3. Определить область существования (определения) функции

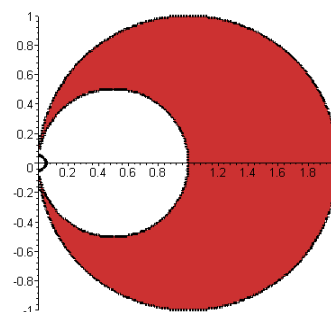
$$u(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

**Решение.** Область существования (или допустимых значений) аналитически заданной функции – это множество тех значений независимой переменной, для которых выражение, задающее функцию, имеет смысл.

Нетрудно заметить, что в данном случае функция определена, если подкоренное выражение неотрицательно. Следовательно, имеем две системы неравенств:

$$\left[ \begin{cases} x^2 + y^2 - x \geq 0, \\ 2x - x^2 - y^2 > 0, \\ x^2 + y^2 - x \leq 0, \\ 2x - x^2 - y^2 < 0. \end{cases} \right. \quad \text{Отсюда следует, что} \quad \left[ \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}, \\ (x-1)^2 + y^2 < 1, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, \\ (x-1)^2 + y^2 > 1. \end{cases} \right. \quad \text{Первая система име-}$$

ет решение, вторая – нет. Таким образом, областью допустимых значений независимых переменных  $x$  и  $y$  является множество точек, находящихся между двумя окружностями, центры которых смещены вправо по оси абсцисс на расстояния их радиусов, равных  $\frac{1}{2}$  и 1 соответственно. Граница меньшей из окружностей входит в область определения функции, а большей – нет. Следует также исключить начало координат.



4. Найти производную функции  $u = (tgt)^{\sin t}$ .

**Решение.** Положим  $x = tgt$ ,  $y = \sin t$ . Тогда  $u = x^y$  и по правилу дифференцирования сложной функции  $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ . А так как  $\frac{\partial u}{\partial x} = x^y \frac{y}{x}$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t, \quad \text{то} \quad \frac{du}{dt} = (tgt)^{\sin t} \left( \frac{1}{\cos t} + \cos t \cdot \ln tgt \right).$$

5. Принимая  $u$  и  $v$  за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

а)  $x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = xy$ , если  $u = \ln x$  и  $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ ;

б)  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , если  $u = \frac{y}{x}$  и  $v = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Решение.** Пусть  $z(x, y) = \tilde{z}(u, v)$ . По правилу дифференцирования сложных функций имеем  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$ .

а) С учетом того, что  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{y + \sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ , найдем  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}$ . Подставляя найденные производные в уравнение  $x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = xy$ , получим  $\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + \frac{\tilde{z}}{\partial v} = e^u sh v$ . Было учтено, что  $x = e^u$ , а  $y + \sqrt{1+y^2} = e^v$ , откуда  $y = \frac{e^{2v} - 1}{2e^v} = \frac{e^v - e^{-v}}{2} = sh v$ .

б) Введём обозначение  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Так как  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x+z}{r} \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y+z}{r} \frac{\partial z}{\partial y}$ , то  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x+z}{r} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + \left( \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y+z}{r} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}$ . Отсюда уже легко найти  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + \frac{\tilde{z}}{r} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}}{1 - \frac{v}{r} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + \frac{\tilde{z}}{r} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}}{1 - \frac{v}{r} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}}$ . Подставляя найденные значения для частных производных  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  в исходное уравнение  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , получим  $\frac{x^2 + y^2}{r} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = v - \frac{v^2}{r} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}$  или  $\frac{x^2 + y^2 + v^2}{r} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = v$ . И так как  $x^2 + y^2 = (v-z)^2 - z^2$ , то  $x^2 + y^2 + v^2 = 2v(v-z) = 2vr$ , следовательно,  $\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = \frac{1}{2}$ .

6. Пусть  $u = f(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и  $f$  — дважды дифференцируемая функция. Показать, что

$$\Delta u = F(r),$$

где  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа, и найти функцию  $F$ .

**Решение.** Понятно, что для ответа на поставленный вопрос необходимо найти частные производные второго порядка функции  $u$  по независимым переменным  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Для более краткого изложения воспользуемся обозначениями. А именно, при значениях индекса  $i = 1, 2, 3$  под символом  $x_i$  будем подразумевать:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ .

Тогда  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''(r) \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 + f'(r) \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}$ .

Поскольку  $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$ , то  $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{r - x_i \frac{\partial r}{\partial x_i}}{r^2} = \frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}$ .

Итак,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}$ . Следовательно,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''(r) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + f'(r) \frac{3r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^3} = f''(r) + f'(r) \frac{2}{r}.$$

Таким образом, действительно  $\Delta u = F(r)$ , а  $F(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$ .

7. Дана функция  $u = xyz$ . Найти её производную в точке  $M_0(5, 1, 2)$  в направлении, идущем от этой точки к точке  $M(7, -1, 3)$ .

**Решение.** Производная функции  $u(x, y, z)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  по направлению  $l(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  определяется по формуле  $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \cos \gamma$ . Так как  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} = 2$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} = 10$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} = 5$ . Проекции вектора  $\overrightarrow{M_0 M}$  соответственно равны  $(x - x_0)$ ,  $(y - y_0)$ ,  $(z - z_0)$ , то есть  $2, -2, 1$ . Направляющими косинусами будут  $\cos \alpha = \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \frac{2}{3}$ ,  $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ ,  $\cos \gamma = \frac{1}{3}$ . Следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = -\frac{11}{3}$ . Знак минус указывает на то, что в данном направлении функция убывает.

8. Показать, что функция  $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$  ( $a$  и  $b$  — постоянные) удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

**Решение.** Прежде чем найти производные  $u'_t$  и  $u''_{x^2}$ , входящие в исходное уравнение, для краткости дальнейших выкладок введём обозначения:  $\alpha$

$= 2a\sqrt{\pi}$ ,  $\beta = 4a^2$ , тогда  $u = \frac{1}{\alpha\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{\beta t}}$ . Так как частная производная по времени  $\frac{\partial u}{\partial t} = \left[ -\frac{1}{2\alpha t\sqrt{t}} + \frac{(x-b)^2}{\alpha\beta t^2\sqrt{t}} \right] e^{-\frac{(x-b)^2}{\beta t}}$ , а частные производные по пространственной координате  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2(x-b)}{\alpha\beta t\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{\beta t}}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[ -\frac{2}{\alpha\beta t\sqrt{t}} + \frac{4(x-b)^2}{\alpha\beta^2 t^2\sqrt{t}} \right] e^{-\frac{(x-b)^2}{\beta t}}$ , то, подставляя найденные выражения для производных в исходное уравнение и сокращая на сомножитель  $e^{-\frac{(x-b)^2}{\beta t}}$ , найдём  $-\frac{1}{2\alpha t\sqrt{t}} + \frac{(x-b)^2}{\alpha\beta t^2\sqrt{t}} = -\frac{2a^2}{\alpha\beta t\sqrt{t}} + \frac{4a^2(x-b)^2}{\alpha\beta^2 t^2\sqrt{t}}$ . С учётом того, что  $\alpha = 2a\sqrt{\pi}$ , а  $\beta = 4a^2$ , пропуская элементарные промежуточные выкладки, получим  $-\frac{1}{4a\sqrt{\pi} t\sqrt{t}} + \frac{(x-b)^2}{8a^3\sqrt{\pi} t^2\sqrt{t}} = -\frac{1}{4a\sqrt{\pi} t\sqrt{t}} + \frac{(x-b)^2}{8a^3\sqrt{\pi} t^2\sqrt{t}}$ . Тем самым исходное предположение доказано.

### Третий семестр

#### **Задачи для самостоятельного решения**

(методические указания даны ниже в разделе «примеры содержательного описания решения типовых задач» после вопросов для подготовки к экзамену)

#### **Найти неопределенные интегралы**

1.  $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx$ .
2.  $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx$ .
3.  $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4\sqrt{x^3}} dx$ .
4.  $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx$ .
5.  $\int \sin x \sin bx dx$ .
6.  $\int x f''(x) dx$ .

#### **Вычислить определенные интегралы**

1.  $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$ .
2.  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ .
3.  $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ .
4.  $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$ .
5.  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ .
6.  $\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$ .

### Исследовать сходимость рядов

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{n}}$ .
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$ .
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ .
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2}$ .
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ .
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}}{n}$ .

### Найти $F'(\alpha)$ , если

1.  $F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx$ .
2.  $F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ .
3.  $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx$ .
4.  $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx$ .
5.  $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha^2} e^{-\alpha x^2} dx$ .

7. Пользуясь основными разложениями, написать разложения в степенной ряд относительно  $x$  следующих функций:

$$e^{-x^2}, \cos^2 x, \frac{x^{10}}{1-x}, \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \frac{1}{(1-x)^2}.$$

### Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

**1-я контрольная точка.** Темы № 11,12. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

**2-я контрольная точка.** Темы № 13,15. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

### Экзамен 40 баллов.

Наибольшее количество баллов за семестр равно 100.

### Вопросы для подготовки к экзамену

Первообразная функция. Таблица основных интегралов.

Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx$ . Указание. Выделить из неправильной рациональной дроби  $\frac{x^3+1}{x^2-x}$  целую часть.

Интегрирование путем замены переменной.

Интегрирование по частям.

Разложение правильных дробей на простые дроби.

Определение ряда и его суммы. Основные теоремы.

Найти  $F''(x)$ , если  $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy$ .

Найти сумму ряда  $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 14n + 48}$ . Указание. Рассмотреть частичную сумму

ряда  $S_k = \sum_{n=9}^k \frac{2}{n^2 - 14n + 48}$  и найти  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ , который и равен сумме ряда.

Подстановки Эйлера.

Условие сходимости положительного ряда.

Вычислить  $\int_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ . Например, воспользоваться подстановкой  $t = \sqrt{x^2+1}$ .

Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+2}{n^3+1}$ . Учесть, что  $\ln(1+x) = o(x)$

для достаточно малых значений  $x$  и один из признаков сравнения сходимости рядов.

Определенный интеграл.

Суммы Дарбу.

Условия существования интегралов.

Теоремы сравнения рядов.

Доказать неравенство  $\left[ \int_a^b f(x)dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x)dx$ , где  $f(x)$  – непрерывная функция для  $x \in [a, b]$ . Указание. Рассмотреть  $\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$ .

Вычислить определенный интеграл  $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$ . Указание. Использовать метод интегрирования по частям и учесть, что  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ,  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ .

Свойства определенных интегралов, выражаемые равенствами и неравенствами.

Признаки Коши и Даламбера сходимости рядов с постоянными членами.

Исследовать на сходимость ряд  $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$ .

Интегрирование по частям и правило замены переменной в определенном интеграле.

Умножение степенных рядов.

Найти определенный интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}$ . Указание. Либо воспользоваться универсальной подстановкой  $t = \tan \frac{x}{2}$ . Или учесть, что  $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ , а  $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$ .

Найти произведение  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  и записать результат в виде степенного ряда.

Интеграл с переменным верхним пределом.

Формула Ньютона-Лейбница.

Общее условие сходимости произвольного ряда.

Абсолютная сходимость.

Найти:  $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx$ ,  $\frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx$ ,  $\frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx$ .

Бесконечные произведения. Основные теоремы. Связь с рядами.

Признаки Абеля и Дирихле сходимости рядов.

Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}}{n}$ , используя признак Абеля.

Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx$ . Указание. Из неправильной рациональной дроби  $\frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1}$  выделить целую часть.

Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}$ .

Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму ряда  $1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$  ( $|x| < 1$ ).

Применяя почленное интегрирование, вычислить сумму ряда  $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$  ( $|x| < 1$ ).

Вычислить  $F'(x)$ , если  $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy$ .

### Примеры содержательного описания решения типовых задач

1. Путем надлежащего преобразования подынтегрального выражения найти интеграл  $\int \frac{xdx}{4+x^4}$ .

**Решение.** Преобразуем подынтегральное выражения к виду, в котором подстановка очевидна и её можно выполнить «мысленно»

$$\int \frac{xdx}{4+x^4} = \frac{1}{4} \int \frac{xdx}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{d\frac{x^2}{2}}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C.$$

2. Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

а)  $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ; б)  $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$ ; в)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$ ; г)  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ ; д)  $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ ;  
 е)  $\int x^3 (1-5x^2)^{10} dx$ .

**Решение.** Метод подстановки (метод замены переменной) заключается в следующем. Если подынтегральная функция  $f(x)$  непрерывна, то полагают  $x = \varphi(t)$ , где функция  $\varphi(t)$  непрерывна вместе со своей производной  $\varphi'(t)$ . Тогда  $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ .

Часто вместо подстановки  $x = \varphi(t)$  употребляют обратную подстановку  $t = \psi(x)$ , учитывая, что  $dt = \psi'(x) dx$ .

Условимся, что при решении некоторых задач в квадратных скобках будут приводиться промежуточные выкладки, не требующие особых комментариев. И если такая скобка стоит после или перед знаком равенства, то она отношения к нему не имеет.

а)  $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = [x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, dx = \cos t dt, 1-x^2 = \cos^2 t] = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t}$   
 $= \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$ . Перед квадратным корнем выбран знак «+», т. к.  $\cos t > 0$  для указанных значений переменной  $t$ .

б)  $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx = [t = \cos^2 x, dt = -2 \cos x \sin x dx] = -\frac{1}{2} \int \frac{t dt}{1+t} =$   
 $-\frac{1}{2} \int \frac{1+t-1}{1+t} dt = -\frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \ln(1+t) + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x +$   
 $\frac{1}{2} \ln(1+\cos^2 x) + C$ .

в)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}} = [t = \sqrt{2-x}, dt = -\frac{dx}{2\sqrt{2-x}}, \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -2dt, x = 2-t^2] =$   
 $-2 \int (2-t^2)^2 dt = -2 \int (4-4t^2+t^4) dt = -2 \left( 4t - \frac{4}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right) + C = -\frac{2\sqrt{2-x}}{15} \cdot$   
 $(3x^2+8x+32) + C$ .

г)  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = [t = \operatorname{tg}^2 x, dt = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx, \frac{1}{3} \frac{dt}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x},$   
 $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 = t + 1] = \frac{1}{3} \int (t+1) dt = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + t \right) + C =$   
 $\frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$ .

Заметим, что и другую подстановку можно увидеть, если сначала преобразовать подынтегральное выражение, с учётом того, что  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  и  $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$ . Действительно,  $\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{d \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} d \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 1) d \operatorname{tg} x$ , поэтому можно взять  $t = \operatorname{tg} x$ . Тогда  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int t^2 (t^2 + 1) dt = \int (t^4 + t^2) dt = \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$ .

$$\text{д) } \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left[ t = \sqrt{1+\ln x}, dt = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} \frac{dx}{x}, \ln x = t^2 - 1 \right] = 2 \int (t^2 - 1) dt = \frac{2}{3} t^3 - 2t + C = \frac{2}{3} t(t^2 - 3) + C = \frac{2}{3} \sqrt{1+\ln x} (\ln x - 2) + C.$$

Если воспользоваться подстановкой  $t = \ln x$ , то  $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{t dt}{\sqrt{1+t}} = \int \frac{t+1-1}{\sqrt{1+t}} dt = \int \sqrt{1+t} dt - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \frac{2}{3} (t+1)^{\frac{3}{2}} - 2(t+1)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{1+t} (t-2) + C = \frac{2}{3} (\ln x - 2) \sqrt{\ln x + 1} + C$ .

Заметим, что эта постановка очевидна, если искомым интеграл переписать в виде  $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{\ln x d \ln x}{\sqrt{1+\ln x}}$ .

е) Воспользуемся подстановкой  $t = 1 - 5x^2$ , тогда  $dt = -10x dx$  и, следовательно,  $\int x^3 (1 - 5x^2)^{10} dx = -\frac{1}{10} \int \frac{1-t}{5} t^{10} dt = -\frac{1}{50} \int t^{10} dt + \frac{1}{50} \int t^{11} dt = -\frac{1}{11 \cdot 50} t^{11} + \frac{1}{12 \cdot 50} t^{12} = -\frac{t^{11}}{50} \left( \frac{1}{11} - \frac{t}{12} \right) = -\frac{t^{11} (12 - 11t)}{6600} = -\frac{(1 - 5x^2)^{11}}{6600} (1 + 55x^2) + C$ .

3. Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

а)  $\int x^n \ln x dx$ ; б)  $\int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$ ; в)  $\int e^{ax} \cos bx dx$ ; г)  $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx$ .

**Решение.** Метод интегрирования по частям заключается в том, что если  $u$  и  $v$  — некоторые дифференцируемые функции, зависящие от переменной  $x$ , то  $\int u dv = uv - \int v du$ .

$$\text{а) } \int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1} \int \ln x dx^{n+1} = \frac{1}{n+1} \left( x^{n+1} \ln x - \int x^{n+1} \frac{dx}{x} \right) = \frac{1}{n+1} \left( x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right) + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C, \text{ при } n \neq -1.$$

При  $n = -1$  имеем  $\int \frac{\ln x dx}{x} = \int \ln x d \ln x = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$ .

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx &= x \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 - 2 \int x \frac{\ln x}{x} \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = \frac{\ln^2 x}{x} - 2 \int \frac{\ln x}{x^2} dx + \\ &+ 2 \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx. \text{ В правой части равенства получили такой же интеграл, что и в} \\ \text{левой, поэтому } \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx &= 2 \int \frac{\ln x}{x^2} dx - \frac{\ln^2 x}{x}, \text{ но } \int \frac{\ln x}{x^2} dx = - \int \ln x d \frac{1}{x} = - \frac{\ln x}{x} \\ &+ \int \frac{1}{x} \frac{dx}{x} = - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C, \text{ и окончательно найдем} \\ \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx &= - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} - \frac{\ln^2 x}{x} + C = - \frac{\ln^2 x + 2 \ln x + 2}{x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{1}{a} \int \cos bx de^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx \\ &+ \frac{b}{a^2} \int \sin bx de^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx dx. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем примере, справа получили тот же интеграл, что и слева. Переносим его в левую часть и приводя подобные члены, найдем, что

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad \int \sin x \cdot \ln(tg x) dx &= - \int \ln(tg x) d \cos x = - \cos x \cdot \ln(tg x) + \int \cos x \frac{1}{tg x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= - \cos x \cdot \ln(tg x) + \int \frac{dx}{\sin x} = - \cos x \cdot \ln(tg x) + \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = - \cos x \cdot \ln(tg x) + \\ &+ \int \frac{d \frac{x}{2}}{tg \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = - \cos x \cdot \ln(tg x) + \int \frac{d tg \frac{x}{2}}{tg \frac{x}{2}} = - \cos x \cdot \ln(tg x) + \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } \int \sin x \cdot \ln(tg x) dx = - \cos x \cdot \ln(tg x) + \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C.$$

4. Применяя подходящую замену переменной, найти следующие интегралы:

$$\text{а)} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad \text{б)} \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx; \quad \text{в)} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

**Решение.** Иногда подстановка очевидна.

а) Сделаем подстановку  $x = a \sin t$ , считая, что  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $dx = a \cos t dt$ ,  $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$  и  $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi a^4}{16}$ .

б) Подстановка  $t = \arcsin \sqrt{x}$  сразу приводит к требуемому результату, т. к.  $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}}$ , и, следовательно,  $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = t^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$ .

в) Нетрудно увидеть, что применима подстановка  $t = \sqrt{e^x - 1}$ , поскольку  $dt = \frac{e^x dx}{2\sqrt{e^x - 1}}$ , а  $\sqrt{e^x - 1} dx = \frac{2t^2 dt}{t^2 + 1} = 2 \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt = 2 \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt$ , и, следовательно, искомый интеграл приводится к легко берущемуся интегралу, а именно  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = 2 - 2 \arctg t \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$ .

5. Исследовать на сходимость ряды:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n \sqrt{n}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{n(n+2)}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4}$ ; г)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2$ .

**Решение.** Из имеющихся признаков сходимости знакопостоянных рядов довольно часто оказывается эффективным признак сравнения: если общий член ряда  $a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ , то при  $p > 1$  ряд сходится, а при  $p \leq 1$  расходится.

а) Общий член ряда  $a_n = \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n \sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ . С учетом признака сравнения заключаем, что данный ряд сходится.

б) Общий член ряда  $a_n = \frac{1 + \sin n}{n(n+2)} \leq \frac{2}{n(n+2)} < \frac{2}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Согласно признаку сравнения исследуемый ряд сходится.

в) Общий член ряда  $a_n = \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4} = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 4}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , т. к.  $\ln(1 + \alpha) = \alpha + O(\alpha^2)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Следовательно, ряд сходится.

г) Общий член ряда  $a_n = n \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2 = n \left( 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right)^2 = n \left( \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^2 = n \left( \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ . С учётом признака сравнения нетрудно заметить, что ряд расходится. Было учтено, что  $e^\alpha = 1 + \alpha + O(\alpha^2)$  при достаточно малых  $\alpha$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ).

К этому же выводу можно прийти и по-другому. Найдём предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n : \frac{1}{n} \right)$  и убедимся в том, что он конечен и не равен нулю, а это и будет означать, что  $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Итак,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right]^2$ . Воспользуемся новой переменной  $t = e^{\frac{1}{n}} - 1$ , которая стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $e^{\frac{1}{n}} = 1 + t$ , то  $\frac{1}{n} = \ln(1+t)$ ,

а  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n : \frac{1}{n} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{t}{\ln(1+t)} \right]^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} \right]^2 = 1$ , с учётом второго замечательного предела  $\left( \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e \right)$ .

6. Найти сумму ряда  $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 14n + 48}$ .

**Решение.** Рассмотрим частичную сумму искомого ряда  $S_n = \sum_{k=9}^n \frac{2}{k^2 - 14k + 48}$ . С помощью метода неопределённых коэффициентов можно представить дробь  $\frac{2}{k^2 - 14k + 48} = \frac{2}{(k-8)(k-6)}$  в виде разности двух дробей, т. е.  $\frac{2}{k^2 - 14k + 48} = \frac{1}{k-8} - \frac{1}{k-6}$ . Следовательно, частичная сумма представлена в виде  $S_n = \sum_{k=9}^n \frac{1}{k-8} - \sum_{k=9}^n \frac{1}{k-6}$ .

Напомним, что если индекс суммирования увеличить (уменьшить) на некоторое число, а пределы суммирования уменьшить (увеличить) на то же число, то сумма от этого не изменится.

В первой сумме индекс суммирования на единицу увеличим, а во второй – уменьшим. Соответственно пределы суммирования в первой сумме должны быть на единицу уменьшены, а во второй – увеличены. С учётом изложенного частичную сумму ряда можно переписать в виде  $S_n = \sum_{k=8}^{n-1} \frac{1}{k-7} -$

$\sum_{k=10}^{n+1} \frac{1}{k-7}$ . Приведём обе суммы к одинаковым пределам суммирования. Для этого из под знака первой суммы «вынесем» первое и второе слагаемые, а из под знака второй суммы – предпоследнее и последнее.

Итак,  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=10}^{n-1} \frac{1}{k-7} - \sum_{k=10}^{n-1} \frac{1}{k-7} - \frac{1}{n-7} - \frac{1}{n-6} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n-7} - \frac{1}{n-6}$ . Так как по определению сумма ряда равна пределу его частичной суммы, то  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}$

### Четвёртый семестр

#### **Задачи для самостоятельного решения**

(методические указания даны ниже в разделе «примеры содержательного описания решения типовых задач» после вопросов для подготовки к экзамену)

**Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейные интегралы**

1.  $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx$ .
2.  $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy$ .
3.  $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dy + (x-y)dx$ .
4.  $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$ .
5.  $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ .
6.  $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy)$ .

**Исследовать сходимость рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  со следующими общими членами**

1.  $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}$ .
2.  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ .
3.  $u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx}$ .
4.  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x dx}{1+x}$ .
5.  $u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$ .
6.  $u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^\alpha}$ .

**Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы**

1.  $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$ , где  $C$  – окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ .

2.  $\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy$ , где  $C$  – эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
3.  $\oint_C e^x [(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy]$ , где  $C$  – пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область  $0 \leq x \leq \pi, 0 < y < \sin x$ .
4.  $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$ .
5. Найти значение интеграла  $\oint_C [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] ds$ , где  $C$  – простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область  $S$ , и  $n$  – внешняя нормаль к ней.
6. Вычислить интеграл  $\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ , где  $C$  – простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат и не окружающий его, пробегаемый в положительном направлении.

#### **Вычислить двойные интегралы**

1.  $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$ , где область  $\Omega$  ограничена кривой  $x^2 + y^2 = x + y$ .
2.  $\iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ , где область  $\Omega$  ограничена эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
3.  $\iint_{|x|+|y| \leq 1} (|x| + |y|) dx dy$ .
4.  $\iint_{x^4+y^4 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy$ .
5.  $\iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy$ .
6.  $\iint_{\Omega} xy dx dy$ , где область  $\Omega$  ограничена кривыми  $xy = 1, x + y = \frac{5}{2}$ .

**Вводя обобщенные полярные координаты  $r$  и  $\varphi$  по формулам  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  ( $r \geq 0$ ), найти площади, ограниченные заданными кривыми (параметры считаются положительными)**

1.  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); x^2 + y^2 \geq a^2$ .
2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}$ .
3.  $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2; x \geq 0, y \geq 0$ .
4.  $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$ .
5.  $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; x = 0, y = 0$ .
6.  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; (x > 0, y > 0)$ .

**Найти объемы тел, ограниченные указанными поверхностями (параметры предполагаются положительными)**

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} (z > 0)$ .
2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
3.  $z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2$ .

4.  $z = x + y, \quad (x^2 + y^2)^2 = 2xy, \quad z = 0 \quad (x > 0, y > 0).$
5.  $z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = x, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$
6.  $z = e^{-(x^2 + y^2)}, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2.$

### **Вычислить тройные интегралы**

1.  $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$ , где граница области  $V$  задана уравнениями  
 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0.$
2.  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
3.  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  
 $x^2 + y^2 = z^2, z = 1.$
4.  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , где граница области  $V$  задана уравнением  
 $x^2 + y^2 + z^2 = z.$
5.  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$
6.  $\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$ , где  $V$  – внутренность эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$

### **Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах функции**

1.  $f(x) = \begin{cases} A, & \text{если } 0 < x < l; \\ 0, & \text{если } l < x < 2l, \end{cases}$  где  $A$  – постоянная, в интервале  $(0, 2l).$
2.  $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{если } -\pi < x < 0; \\ bx, & \text{если } 0 < x < \pi, \end{cases}$  где  $a, b$  – постоянные, в интервале  $(-\pi, \pi)$ .
3.  $f(x) = \pi^2 - x^2$  в интервале  $(-\pi, \pi).$
4.  $f(x) = x \sin x$  в интервале  $(-\pi, \pi).$
5.  $f(x) = x \cos x$  в интервале  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$
6.  $f(x) = \sin ax$  в интервале  $(-\pi, \pi).$

### **Оценочные средства для текущего контроля успеваемости**

**1-я контрольная точка.** Темы № 16-18. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

**2-я контрольная точка.** Темы № 19-21. По текущей работе студента и за

посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

**Экзамен 40 баллов.**

Наибольшее количество баллов за семестр равно 100.

### Вопросы для подготовки к экзамену

Определение равномерной сходимости функциональной последовательности к предельной функции и условие равномерной сходимости.

Признаки равномерной сходимости рядов.

Функциональные свойства суммы ряда.

Почленный переход к пределу.

Почленное интегрирование рядов.

Почленное дифференцирование рядов.

Интегрирование и дифференцирование степенного ряда.

Радиус и область сходимости степенного ряда.

Определение интегралов с бесконечными пределами. Аналогия с рядами.

Сходимость несобственного интеграла (с бесконечными пределами) в общем случае.

Используя признак Дирихле, исследовать сходимость интеграла

$$\int_a^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \quad (n > 0, a \neq 0).$$

Определение несобственных интегралов от неограниченных функций.

Вычислить несобственный интеграл  $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

Главные значения несобственных интегралов.

Найти  $F'(\alpha)$ , если  $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx.$

Предельный переход под знаком несобственного интеграла.

Главные значения несобственных интегралов.

Найти  $V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \arctg x dx.$

Вычислить  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$  Например, внести  $x$  под знак дифференциала и воспользоваться подстановкой  $t = x^2.$

Вычислить  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$  Например, воспользоваться подстановкой  $t = \sqrt{x^2-1}.$

Вычислить  $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}.$  Например, воспользоваться подстановкой

$x = \sin t$  и учесть, что  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

Вычислить  $\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{x^{2/3}} dx$ .

Вычислить  $V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ .

Интегралы, зависящие от параметра.

Задача об объёме. Двукратный интеграл.

Найти объём тела, ограниченного поверхностями:  $x + y + z = 1$ ,  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

В двойном интеграле  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, если  $\Omega$  – трапеция с вершинами:  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(1,2)$ ,  $C(0,1)$ .

Замена переменных в двойном интеграле.

Переходя к полярным координатам заменить двойной интеграл  $\iint_{x^2+y^2 \leq x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$  однократным.

Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.

Вычисление тройных интегралов (приведение к повторному интегралу в декартовой системе координат).

Элемент объёма в криволинейных координатах. Цилиндрические и сферические координаты.

Вычислить объём тела  $V = \iiint_{\Omega} dv$ , где  $\Omega$  – область тела, ограниченного поверхностями:  $z = 3 - x - y$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ . Указание. Например,  $\iiint_{\Omega} dv =$

$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\sigma_{xy}} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$ , где  $\sigma_{xy}$  – проекция тела на плоскость  $Oxy$ , а  $z_1(x, y)$  и  $z_2(x, y)$  – поверхности, определяющие, соответственно, точки входа и выхода при фиксированных значениях  $x$  и  $y$ .

Вычислить интеграл  $I = \iiint_V z dx dy dz$ , где тело  $V$  ограничено конической поверхностью  $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$  и плоскостью  $z = h$ . Указание. Воспользоваться цилиндрической системой координат.

Формула Остроградского (связь между трехкратным интегралом по объёму и интегралом по поверхности, ограничивающей этот объём).

С помощью формулы Остроградского вычислить поверхностный интеграл  $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , где  $S$  – внешняя сторона границы куба:

$0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq a$ . Указание. Учесть, что  $\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ .

Проинтегрировать по частям  $\iiint_V \varphi \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) dV$ , где конечный объем  $V$  ограничен поверхностью  $S$ . Указание. Учесть, что  $\iiint_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV = \iint_S \varphi \psi \cos(n, x_i) ds - \iiint_V \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dV$ , где  $x_i = x, y$  или  $z$ .

Найти площадь  $S = \iint_S dS$  участка поверхности, вырезаемого цилиндром  $x^2 + y^2 = R^2$  ( $x > 0, y > 0$ ) из гиперболического параболоида  $z = xy$ . Указание. Элемент площади поверхности  $dS$  связан с элементом площади  $d\sigma = dx dy$  проекции части кривой поверхности на плоскость  $Oxy$  соотношением  $dS = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy$ , если уравнение поверхности имеет вид  $z = f(x, y)$ .

Вычислить  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , где объем  $V$  — ограничен поверхностями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  и расположен в первом октанте. Указание. Воспользоваться сферической системой координат.

Найти объём тела, ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ . Указание. Воспользоваться цилиндрической системой координат.

Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , где область  $V$  — ограничена поверхностями:  $x^2 + y^2 = 2z$ ,  $z = 2$ .

Вычислить площадь поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , вырезанной цилиндром  $x^2 + y^2 \leq R^2$  ( $R \leq a$ ). Указание. Элемент площади поверхности  $dS$  связан с элементом площади  $d\sigma = dx dy$  проекции части кривой поверхности на плоскость  $Oxy$  соотношением  $dS = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy$ , если уравнение поверхности имеет вид  $z = f(x, y)$ .

Вычислить объём тела  $V = \iiint_{\Omega} dv$ , где  $\Omega$  — область тела, ограниченного поверхностями:  $z = 3 - x - y$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ .

Вычислить поверхностный интеграл  $\iint_S x dS$ , где  $S$  — часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , лежащая в первом октанте ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ). Указание. Элемент площади поверхности  $dS$  связан с элементом площади проекции на плоскость  $Oxy$  соотношением  $dS = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy$ , если уравнение поверхности имеет вид  $z = f(x, y)$ .

Определение криволинейного интеграла первого рода.

Вычислить  $\int_C y^2 dl$ , где  $C$  – кривая  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Указание. Воспользоваться тем, что  $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$

Определение криволинейного интеграла второго рода.

Вычислить  $\int_C (x+y)dx + (x-y)dy$ , где  $C$  – эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , пробегае-

мый против часовой стрелки. Указание. Воспользоваться формулой Грина или параметрическим заданием эллипса  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

Вычислить  $\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ , где  $C$  – окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ , про-

бегаемая против часовой стрелки. Указание. Воспользоваться параметрическим заданием окружности  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода, когда уравнение кривой задано в параметрической форме.

Вычислить  $\int_C ydx + xdy$ , где  $C$  – четверть окружности  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$

от  $t = 0$  до  $t = \frac{\pi}{2}$ .

Вычисление криволинейного интеграла второго рода в случае плоской кривой, заданной явным уравнением.

Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy dx + x^2 dy$  вдоль линий:

а)  $y = x$ ; б)  $y = x^2$ ; в)  $y = x^3$ ; г)  $y^2 = x$ .

Площадь и криволинейный интеграл.

Доказать, что величина интеграла  $\int_C (2xy - y)dx + x^2 dy$ , где  $C$  – замкну-

тый контур, выражает площадь области, ограниченной этим контуром. Указание. Воспользоваться формулой Грина.

Определение криволинейного интеграла первого и второго рода.

Формула Грина (связь между интегралом по плоской области и интегралом по её границе).

Вычислить интеграл  $\int_{AB} x^2 dx + xy dy$ : а) вдоль прямолинейного отрезка, идущего из точки  $(1,0)$  в точку  $(0,1)$ ; б) вдоль четверти окружности  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ).

С помощью формулы Грина вычислить  $\int_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ , где

$C$ : а) эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; б) окружность  $x^2 + y^2 = ax$ . Интегрирование ведется в положительном направлении.

Формула Стокса (связь криволинейного интеграла по контуру поверхности с интегралом по самой поверхности).

Интеграл  $\int_C (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$ , взятый по некоторому замкнутому контуру, преобразовать с помощью формулы Стокса в интеграл по поверхности, «натянутой» на этот контур. Указание. Учесть, что  $\int_C Pdx + Qdy + Rdz$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \text{ где контур } C \text{ ограничивает незамкнутую поверхность } S.$$

Найти площадь эллипса  $x = acost, y = asint$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) с помощью криволинейного интеграла. Указание. Например, воспользоваться формулой  $S = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$ , где  $C$  – контур, ограничивающий указанную область.

Независимость криволинейного интеграла от пути на плоскости.

Убедиться в том, что интеграл  $\int_C f(xy)(ydx + xdy)$ , взятый по замкнутому контуру, равен нулю независимо от вида функции  $f$ , входящей в подынтегральное выражение.

С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл  $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy$ . Указание. Воспользоваться тем, что

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS.$$

Правило нахождения первообразной  $U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C$  подынтегрального выражения  $Pdx + Qdy$ , являющегося полным дифференциалом. Указание. Учесть, что  $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$  и проинтегрировать по сторонам прямоугольника, вершинами которого являются точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$ . Стороны прямоугольника параллельны координатным осям.

Формула Стокса.

Найти функцию по данному её полному дифференциалу  $du = \frac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2}$ . Указание. Учесть, что  $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ . Далее, например,  $u(x, y) =$

$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(y)$ , где  $\varphi(y)$  – произвольная дифференцируемая функция. Полученный «результат» надо продифференцировать по переменной  $y$  и приравнять к производной  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , что позволит найти функцию  $\varphi(y)$  с точностью до произвольной постоянной  $C$ .

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл  $\int_C xy^2 dy - x^2 y dx$ , где  $C$  – окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ .

Независимость криволинейного интеграла от пути на плоскости.

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл  $\int_C (x+y)dx - (x-y)dy$ , где  $C$  — эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Указание. Учесть, что

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS.$$

Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$  (начало координат не лежит на контуре интегрирования). Указание. Убедиться в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом. И, либо, найти первообразную, либо, проинтегрировать по сторонам прямоугольника, вершинами которого являются точки  $(3,4)$  и  $(5,12)$ . Стороны прямоугольника параллельны координатным осям.

Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , где точки  $P_1$  и  $P_2$  расположены на концентрических окружностях с центрами в начале координат и радиусами соответственно  $R_1$  и  $R_2$  (начало координат не лежит на контуре интегрирования). Указание. Убедиться в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти первообразную.

Применяя формулу Грина вычислить интеграл  $\int_C xy^2 dy - x^2 y dx$ , где  $C$  — окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ .

### Примеры содержательного описания решения типовых задач

1. Вычислить интеграл  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ .

**Решение.** Разлагая подынтегральную функцию на сумму двух дробей, используя метод неопределённых коэффициентов, получим:  $\frac{1}{x^2 + x - 2} =$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + 2A - B}{(x-1)(x+2)} \text{ и из системы уравнений}$$

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2A-B=1 \end{cases} \text{ найдём, что } A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, \text{ т. е. } \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}.$$

Но записать искомый интеграл в виде разности двух несобственных интегралов

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x+2} \text{ нельзя, т. к. каждый из интегралов в правой}$$

части последнего равенства расходящийся. Поэтому воспользуемся определением несобственного интеграла, для чего рассмотрим определённый интеграл

$$\int_2^A \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \int_2^A \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int_2^A \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3} [\ln(x-1) - \ln(x+2)] \Big|_2^A = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} \Big|_2^A =$$

$$\frac{1}{3} \left( \ln \frac{A-1}{A+2} - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \ln \frac{4(A-1)}{A+2}.$$

По определению  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x^2+x-2}$ , то есть  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} =$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln \frac{4(A-1)}{A+2} = \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{4\left(1-\frac{1}{A}\right)}{1+\frac{2}{A}} = \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{2}{3} \ln 2.$$

2. Найти интеграл  $v.p. \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x}$ .

**Решение.** В данном случае пределы интегрирования конечны, но подынтегральная функция неограниченна в рассматриваемом промежутке.

Под главным значением несобственного интеграла на отрезке  $[a, b]$  от функции  $f(x)$  в смысле Коши ( $v.p.$ ) понимается число  $v.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]$ , где  $c$  принадлежит интервалу  $(a, b)$  и является особой точкой, т. е. подынтегральная функция в её окрестности неограниченна.

Итак  $v.p. \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{d \ln x}{\ln x} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d \ln x}{\ln x} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \ln |\ln x| \Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} + \ln |\ln x| \Big|_{1+\varepsilon}^2 \right)$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \ln |\ln(1-\varepsilon)| - \ln \ln 2 + \ln \ln 2 - \ln \ln(1+\varepsilon) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} \right| =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{-\varepsilon + O(\varepsilon^2)}{\varepsilon + O(\varepsilon^2)} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{-1 + O(\varepsilon)}{1 + O(\varepsilon)} \right| = \ln 1 = 0.$$

При нахождении предела было учтено, что  $\ln(1+\alpha) = \alpha + O(\alpha^2)$  для достаточно малых значений  $\alpha$ .

3. Найти  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$ .

**Решение.** Возможность предельного перехода под знаком интеграла  $\int_a^b f(x, \alpha) dx$ , зависящего от параметра  $\alpha$ , даётся теоремой.

Если функция  $f(x, \alpha)$  при постоянном значении  $\alpha$  интегрируема по  $x$  в промежутке  $[a, b]$  и при  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  стремится к предельной функции  $\varphi(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha)$  равномерно относительно  $x$ , то имеет место равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Подынтегральная функция  $f(x, \alpha) = \frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$  имеет конечную предельную функцию  $\varphi(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x, \alpha) = \frac{1}{1+x^2}$  и стремится к ней равномерно.

Для доказательства последнего утверждения покажем, что для любого сколь угодно малого произвольного числа  $\varepsilon > 0$  найдется не зависящее от  $x$  число  $\delta > 0$ , такое, что при  $|\alpha| < \delta$  будет выполняться неравенство  $|f(x, \alpha) - \varphi(x)| < \varepsilon$  одновременно для всех значений  $x$ .

По определению это и будет означать равномерное относительно  $x$  стремление функции  $f(x, \alpha)$  к предельной функции  $\varphi(x)$ .

Итак,  $|f(x, \alpha) - \varphi(x)| = \left| \frac{1}{1+x^2+\alpha^2} - \frac{1}{1+x^2} \right| = \left| \frac{1+x^2-1-x^2-\alpha^2}{(1+x^2+\alpha^2)(1+x^2)} \right| = \frac{\alpha^2}{(1+x^2+\alpha^2)(1+x^2)} \leq \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} < \alpha^2 < |\alpha| < \varepsilon$ . Следовательно, за число  $\delta$  можно принять  $\varepsilon$ .

Нетрудно заметить, что подынтегральная функция  $f(x, \alpha)$  при постоянном значении  $\alpha$  интегрируема по переменной  $x$ . Поэтому можно воспользоваться теоремой о предельном переходе под знаком интеграла, т. е.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

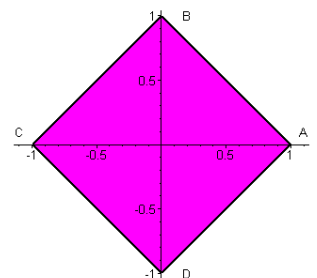
4. Изменить порядок интегрирования в интеграле  $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$ .

**Решение.** Запишем исходный интеграл в виде суммы двух интегралов и во втором из них изменим направление интегрирования  $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy - \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_{\sin x}^0 f(x, y) dy$ . В каждом из интегралов в правой части изменим порядок интегрирования, учитывая, что  $\text{Arcsin } y = (-1)^k \arcsin y + \pi k$ . При изменении  $y$  от 0 до 1 переменная  $x$  изменяется от  $\arcsin y$  до  $\pi - \arcsin y$ , а при изменении  $y$  от -1 до 0 переменная  $x$  изменяется от  $\pi - \arcsin y$  до  $2\pi + \arcsin y$ . Окончательно получим

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$$

5. Произведя соответствующую замену переменных, свести двойной интеграл  $\iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy$  к однократному.

**Решение.** Нетрудно изобразить область интегрирования. Она симметрична относительно осей и начала



координат. В первом квадранте при  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$  – это равнобедренный прямоугольный треугольник, где  $0 \leq x \leq 1$  и  $y \leq -x+1$ .

Итак, областью интегрирования является квадрат.

Введём новые переменные  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ . Легко найти, что  $x = \frac{u+v}{2}$ ,  $y = \frac{u-v}{2}$ .

При такой замене переменных прямая  $y = -x+1$ , содержащая отрезок  $AB$ , отобразится в прямую  $u = 1$ , т. к. при подстановке  $x = \frac{u+v}{2}$ ,  $y = \frac{u-v}{2}$  в уравнение данной прямой получим  $u = 1$ . Совершенно аналогично прямая  $y = x+1$ , содержащая отрезок  $BC$ , отобразится в прямую  $v = -1$ ; прямая  $y = -x-1$ , содержащая отрезок  $CD$ , отобразится в прямую  $u = -1$ ; прямая  $y = x-1$ , содержащая отрезок  $DA$ , отобразится в прямую  $v = 1$ .

Так как на отрезке оси  $Ox$  при  $y = 0$  и  $-1 \leq x \leq 1$ :  $-1 \leq \frac{u+v}{2} \leq 1$  и  $u = v$ , то  $-1 \leq u \leq 1$ , а на отрезке оси  $Oy$  при  $x = 0$  и  $-1 \leq y \leq 1$ :  $-1 \leq \frac{u-v}{2} \leq 1$  и  $u = -v$ , то  $-1 \leq -v \leq 1$  или  $-1 \leq v \leq 1$ .

Таким образом, квадрат, заданный в плоскости  $Oxy$ , при указанной замене переменных преобразуется в квадрат  $[-1, 1; -1, 1]$  со сторонами, параллельными осям координат в плоскости  $Ouv$ . Якобиан данного преобразования

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad |J| = \frac{1}{2}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 f(u) du = \int_{-1}^1 f(u) du.$$

6. Переходя к полярным координатам, найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:  $z = e^{-(x^2+y^2)}$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = R^2$ .

**Решение.** Объем  $V$  тела, ограниченного поверхностью  $\Omega$ , равен

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\sigma} dx dy \int_0^{e^{-(x^2+y^2)}} dz = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Перейдем к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  и с учетом того, что якобиан преобразования равен  $r$ , получим  $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr =$

$\pi \int_0^R e^{-r^2} dr^2 = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^R = \pi(1 - e^{-R^2})$ . Ясно, что  $x^2 + y^2 = R^2$  и есть цилиндр, проектирующий часть поверхности  $z = e^{-(x^2+y^2)}$ , вырезаемую им, на плоскость

$Oxy$ , поэтому область  $\sigma$  – это круг, уравнение которого  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , что и было учтено при определении и расстановке пределов интегрирования.

7. Вычислить криволинейный интеграл первого рода  $\int_l (x^2 + y^2) dl$ , где  $l$  – кривая  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ );

**Решение.** Так как кривая ( $l$ ) задана параметрически:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  ( $t_0 \leq t \leq T$ ), то для вычисления криволинейного интеграла первого рода надо заменить в подынтегральной функции переменные  $x$  и  $y$  их выражениями через параметр, а  $dl$  – дифференциалом дуги  $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ , т. е.

$$\int_l f(x, y) dl = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

$$\text{Итак, } x'(t) = at \cos t, \quad y'(t) = at \sin t, \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = at, \quad x^2 + y^2 = a^2(1 + t^2).$$

$$\text{Следовательно, } \int_l (x^2 + y^2) dl = a^3 \int_0^{2\pi} t(1 + t^2) dt = a^3 \int_0^{2\pi} (t + t^3) dt = a^3 \left( \frac{4\pi^2}{2} + \frac{16\pi^4}{4} \right) = 2a^3 \pi^2 (1 + 2\pi^2).$$

8. Применив формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл  $\int_l xy^2 dy - x^2 y dx$ , где  $l$  – окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ .

**Решение.** Функции  $xy^2$  и  $x^2 y$  непрерывны вместе со своими частными производными в области, ограниченной замкнутым контуром  $l$ , и на ее границе, поэтому применима формула Грина, связывающая двойной и криволинейный интегралы  $\int_l P dx + Q dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ . Согласно ей имеем  $\int_l xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x} (xy^2) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) \right] dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dx dy$ . Перейдем к полярным координатам ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) и, учитывая, что якобиан преобразования равен  $r$ , получим  $\iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}$ .

9. Определить площадь части винтовой поверхности  $x = \xi \cos \eta$ ,  $y = \xi \sin \eta$ ,  $z = c\eta$ , вырезанной из неё цилиндром  $x^2 + y^2 = a^2$  и плоскостями  $z = 0$  и  $z = 2\pi c$  ( $c > 0$ ).

**Решение.** Из условия задачи нетрудно заметить, что  $0 \leq \eta \leq 2\pi$ , а  $0 \leq \xi \leq a$ . Гауссовы коэффициенты легко вычисляются и равны:  $E = 1$ ,  $G = \xi^2 + c^2$ ,  $F = 0$ . Следовательно,  $dS = \sqrt{EG - F^2} d\xi d\eta = \sqrt{\xi^2 + c^2} d\xi d\eta$  и площадь указанной части поверхности  $S = \int_0^{2\pi} d\eta \int_0^a \sqrt{\xi^2 + c^2} d\xi = 2\pi \int_0^a \sqrt{\xi^2 + c^2} d\xi$ .

Вычислим интеграл  $\int_0^a \sqrt{\xi^2 + c^2} d\xi = \int_0^a \frac{(\xi^2 + c^2) d\xi}{\sqrt{\xi^2 + c^2}} = \int_0^a \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^2 + c^2}} + c^2 \int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + c^2}} = \int_0^a \xi d\sqrt{\xi^2 + c^2} + c^2 \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + c^2}) \Big|_0^a = \xi \sqrt{\xi^2 + c^2} \Big|_0^a - \int_0^a \sqrt{\xi^2 + c^2} d\xi + c^2 \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + c^2}) \Big|_0^a$ . После очевидных преобразований получили, что в правой части равенства имеется такой же интеграл, что и в левой. Переносим его в левую часть и делим полученное равенство на два, найдём что  $\int_0^a \sqrt{\xi^2 + c^2} d\xi = \frac{1}{2} \left[ \xi \sqrt{\xi^2 + c^2} + c^2 \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + c^2}) \right] \Big|_0^a = \frac{1}{2} \left[ a \sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \ln(a + \sqrt{a^2 + c^2}) - c^2 \ln c \right] = \frac{1}{2} \left( a \sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{c} \right)$ .

Следовательно,  $S = \pi \left( a \sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{c} \right)$ .

10. Функцию  $f(x) = e^{ax}$  разложить в ряд Фурье в интервале  $(-\pi, \pi)$ .

**Решение.** Функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть представлена рядом Фурье.

Ряд Фурье имеет вид  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , где  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Найдём коэффициенты Фурье:  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{1}{a\pi} e^{ax} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a\pi} = \frac{2}{a\pi} \operatorname{sh} a\pi$ ,  $\frac{a_0}{2} = \frac{\operatorname{sh} a\pi}{a\pi}$ . Для  $k \geq 1$  значения коэффициентов вычисляются по формуле  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos kx dx$ .

Найдём, чему равен интеграл  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos kx dx = \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx de^{ax} = \frac{1}{a} \left( e^{ax} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin kx dx \right) = \frac{k}{a^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx de^{ax} + \frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})(-1)^k}{a} = \frac{k}{a^2} e^{ax} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{k^2}{a^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos kx dx + \frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})(-1)^k}{a}$ . В правой части равенства получили тот же интеграл, что и в левой, следовательно,  $\frac{a^2 + k^2}{a^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos kx dx =$

$(-1)^k \frac{2 \operatorname{sh} a \pi}{a}$  и  $a_k = (-1)^k \frac{2a \operatorname{sh} a \pi}{\pi(a^2 + k^2)}$ . Заметим, что в данном случае из последней формулы можно найти коэффициент  $a_0$ .

Совершенно аналогично найдем, что  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin kx dx = \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx de^{ax} = \frac{1}{a} (e^{ax} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos kx dx) = -\frac{k}{a^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx de^{ax} = -\frac{k}{a^2} (e^{ax} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin kx dx) = -\frac{k(e^{a\pi} - e^{-a\pi})(-1)^k}{a^2} - \frac{k^2}{a^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin kx dx$ , откуда с учетом того, что в правой части получили тот же интеграл, что и в левой, следует, что  $\frac{a^2 + k^2}{a^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin kx dx = -(-1)^k \frac{2k \operatorname{sh} a \pi}{a^2}$  и  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin kx dx = (-1)^{k-1} \frac{2k \operatorname{sh} a \pi}{\pi(a^2 + k^2)}$ .

Таким образом, придем к разложению

$$e^{ax} = \frac{2 \operatorname{sh} a \pi}{\pi} \left( \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a \cos kx - k \sin kx}{a^2 + k^2} \right) \quad (-\pi < x < \pi).$$

Заметим, что коэффициенты Фурье можно найти значительно проще, если использовать формулу Эйлера  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  и комплексную функцию действительного аргумента  $F(x) = e^{ax} (\cos kx + i \sin kx) = e^{(a+ik)x}$ , тогда  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos kx dx = \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a+ik)x} dx$ , а  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin kx dx = \operatorname{Im} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a+ik)x} dx$ .

Вычислим интеграл  $\int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a+ik)x} dx = \frac{e^{(a+ik)x}}{a+ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(a+ik)\pi} - e^{-(a+ik)\pi}}{a+ik} = \frac{e^{a\pi} e^{ik\pi} - e^{-a\pi} e^{-ik\pi}}{a+ik} = \frac{e^{a\pi} (\cos k\pi + i \sin k\pi) - e^{-a\pi} (\cos k\pi - i \sin k\pi)}{a+ik} = \frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi}) \cos k\pi}{a+ik} = (-1)^k \frac{2 \operatorname{sh} a \pi}{a+ik} = (-1)^k \frac{2}{a^2 + k^2} (a \operatorname{sh} a \pi - i k \operatorname{sh} a \pi)$ . Разделяя действительную и мнимую части, получим требуемый результат.

## Возможные темы курсовых работ

Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных и изобразить соответствующую поверхность, используя какой-либо графический пакет прикладных программ.

1.  $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ .
2.  $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$ .
3.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .
4.  $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ .
5.  $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ .

6.  $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0).$
7.  $z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0).$
8.  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$
9.  $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2).$
10.  $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y) \quad (0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi).$

Найти точки условного экстремума функции и изобразить соответствующую поверхность, используя какой-либо графический пакет прикладных программ.

1.  $z = xy$ , если  $x + y = 1$ .
2.  $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ , если  $x^2 + y^2 = 1$ .
3.  $z = x^2 + y^2$ , если  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .
4.  $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ , если  $x^2 + y^2 = 1$ .
5.  $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ , если  $4x^2 + y^2 = 25$ .
6.  $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ , если  $x - y = \frac{\pi}{4}$ .

Найти экстремальные значения заданной неявно функции  $z$  от переменных  $x$ ,  $y$  и изобразить соответствующую поверхность, используя какой-либо графический пакет прикладных программ.

1.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$
2.  $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$
3.  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$

### Пример содержательного описания (краткого) РГР.

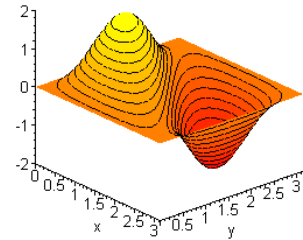
Исследовать на экстремум функцию  $z = \sin x \sin y \sin(x + y) \quad (0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi)$  и изобразить соответствующую поверхность, используя какой-либо графический пакет прикладных программ.

**Решение.** Для ответа на поставленный вопрос найдем от заданной функции частные производные первого порядка  $z'_x = \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin y [\sin(x + y) \cos x + \cos(x + y) \sin x] = \sin y \sin(2x + y)$ ,  $z'_y = \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin x [\sin(x + y) \cos y + \cos(x + y) \sin x]$

$= \sin x \sin(x+2y)$ . Приравнявая их к нулю, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \sin y \sin(2x+y) = 0, \\ \sin x \sin(x+2y) = 0 \end{cases} \text{ для отыскания координат стационарных точек.}$$

Заметим, что определение экстремума предполагает то, что точка, в которой он может достигаться, должна быть «внутренней» (речь не идет о наименьшем и наибольшем значении функции в заданной области). Поэтому граничные точки  $(0,0)$ ,  $(0,\pi)$ ,  $(\pi,0)$ ,  $(\pi,\pi)$ , являющиеся решениями данной системы уравнений, из рассмотрения исключаем. Из первого уравнения системы  $\begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$  найдем  $2x+y$



$= \pi k$  и  $y = \pi k - 2x$ . Подставляя указанное выражение во второе уравнение, получим  $\sin 3x = 0$ , откуда  $x = \frac{\pi n}{3}$ , причем  $n$  с учетом условия  $0 < x < \pi$  может равняться только единице или двум. Поэтому  $x = \frac{\pi}{3}$  или  $x = \frac{2\pi}{3}$ . Этим двум значениям переменной  $x$  с учетом того, что  $0 < y < \pi$ , соответствуют два значения переменной  $y$ :  $y = \frac{\pi}{3}$  и  $y = \frac{2\pi}{3}$ .

Таким образом, внутри рассматриваемой области имеются две стационарные точки, координаты которых равны:  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ,  $y_0 = \frac{\pi}{3}$  и  $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $y_0 = \frac{2\pi}{3}$ . Найдем частные производные второго порядка:  $z''_{x^2} = 2 \sin y \cos(2x+y)$ ,  $z''_{y^2} = 2 \sin x \cos(2x+y)$ ,  $z''_{xy} = \sin 2(x+y)$ . Вычислим значения вторых производных в стационарных точках.

При  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ,  $y_0 = \frac{\pi}{3}$  имеем  $a_{11} = z''_{x^2} = -\sqrt{3}$ ,  $a_{22} = z''_{y^2} = -\sqrt{3}$ ,  $a_{12} = z''_{xy} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$  и т. к.  $a_{11} < 0$ , то в этой точке функция имеет максимум, а именно  $z = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

При  $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $y_0 = \frac{2\pi}{3}$  получим  $a_{11} = z''_{x^2} = \sqrt{3}$ ,  $a_{22} = z''_{y^2} = \sqrt{3}$ ,  $a_{12} = z''_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$ ,  $a_{11} > 0$ , следовательно, в этой точке функция  $z$  имеет минимум, равный  $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

## VII. Материально-техническое обеспечение

Для аудиторной работы.

|                                                                                          |                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Учебная аудитория № 304<br>(170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)      | Набор учебной мебели,<br>экран,<br>комплект аудиотехники (радиосистема,<br>стационарный микрофон с настольным<br>держателем, усилитель, микшер, аку-<br>стическая система),<br>проектор,<br>ноутбук. |
| Учебная аудитория № 20<br>(170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)       | Набор учебной мебели,<br>экран,<br>проектор.                                                                                                                                                         |
| Учебная аудитория № 308 (170002, Твер-<br>ская обл., г.Тверь, Садовый переулок,<br>д.35) | Набор учебной мебели,<br>экран,<br>проектор.                                                                                                                                                         |
| Учебная аудитория № 206 (170002, Твер-<br>ская обл., г.Тверь, Садовый переулок,<br>д.35) | Набор учебной мебели,<br>экран,<br>проектор.                                                                                                                                                         |
| Учебная аудитория № 7<br>(170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)        | Набор учебной мебели                                                                                                                                                                                 |
| Учебная аудитория № 310 (170002, Твер-<br>ская обл., г.Тверь, Садовый переулок,<br>д.35) | Набор учебной мебели                                                                                                                                                                                 |

Для самостоятельной работы.

|                                                                                                                                                                     |                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Помещение для самостоятельной работы обучающихся:<br>Компьютерный класс №3 факультета ПМиК<br>№ 4в<br><i>170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35</i> | Компьютер,<br>экран,<br>маркерная доска,<br>проектор,<br>кондиционер. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|

### VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

| №п.п. | Обновленный раздел ра-<br>бочей программы дисци-<br>плины    | Описание внесенных<br>изменений                              | Реквизиты документа,<br>утвердившего изменения                   |
|-------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 1     | 11. 2) Программное<br>обеспечение                            | Внесены изме-<br>нения в список ПО                           | От 24.08.2023 года,<br>протокол № 1 ученого<br>совета факультета |
| 2     | V.1)Рекомендуемая<br>литература                              | Обновление<br>ссылок на литерату-<br>ру                      | От 24.08.2023 года,<br>протокол № 1 ученого<br>совета факультета |
| 3     | I. Аннотация<br>3. Объем дисциплины<br>II. Содержание дисци- | Изменение часов<br>контактной аудитор-<br>ной работы в 4 се- | От 16.01.2025 года,<br>протокол № 7 ученого<br>совета факультета |

|  |                                                                                                                                                                  |        |  |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--|
|  | плины, структуриро-<br>ванное по темам (разде-<br>лам) с указанием отве-<br>денного на них количе-<br>ства академических ча-<br>сов и видов учебных за-<br>нятий | местре |  |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--|