

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 09.07.2025 12:50:51  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП

С.М.Дудаков



2023 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Математическое моделирование

Для студентов 3 курса очной формы обучения

Составитель: к.т.н. Г.А. Михно

Тверь, 2023

## I. Аннотация

### 1. Цель и задачи дисциплины

Целями и задачами освоения дисциплины являются:

- ознакомление студентов с теоретическими и практическими основами вариационного исчисления;
- развитие логического и алгоритмического мышления;
- формирование умения самостоятельно изучать литературу по вариационному исчислению;
- выработка у студентов навыков решения задач по вариационному исчислению.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части формируемой участниками образовательных отношений, разделу «Дисциплины профиля подготовки» и является элективной дисциплиной 1.

Дисциплина требует знаний и умений, формируемых в результате освоения дисциплин «Математический анализ», «Функциональный анализ», изучаемых на предшествующих курсах.

### 3. Объем дисциплины: 5 зачетных единицы, 180 академических часов, в том числе:

**контактная аудиторная работа:** лабораторные работы 60 часов; в т.ч. практическая подготовка 0 часов.

**контактная внеаудиторная работа:** контроль самостоятельной работы \_\_\_ - \_\_\_\_, в том числе курсовая работа \_\_\_ - \_\_\_\_;

**самостоятельная работа:** 120 часов, в том числе контроль 36 часов.

### 4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
<b>ПК-2 Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат</b>	ПК-2.1 Знает и понимает современный математический аппарат ПК-2.2 Применяет современный математический аппарат к решению научных задач

### 5. Форма промежуточной аттестации экзамен (5 семестр).

### 6. Язык преподавания русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Самостоятел ьная работа, в том числе Контроль (час.)
		Лек ции	Лабораторные работы		Контрол ь самосто ятельно й работы (в том числе курсова я работа)	
			Всего	В т.ч. практическая подготовка		
1. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами.	56	0	20	0	0	36
2. Вариационные задачи с подвижными границами.	48	0	18	0	0	30
3. Достаточные условия экстремума.	42	0	12	0	0	30
4. Вариационные задачи на условный экстремум.	34	0	10	0	0	24
<b>ИТОГО</b>	<b>180</b>	<b>0</b>	<b>60</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>120</b>

**1. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами.**

Примеры задач вариационного исчисления.

Вариация и ее свойства.

Необходимое условие экстремума функционала.

Исследование на экстремум задач с неподвижными границами. Уравнение Эйлера.

Некоторые простейшие случаи интегрируемых уравнений Эйлера.

Определение экстремума функционалов, зависящих от нескольких функций, а также от производных более высокого порядка.

Уравнение Эйлера-Пуассона.

Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.

Уравнение Остроградского.

Вариационные задачи в параметрической форме.

Некоторые приложения.

**2. Вариационные задачи с подвижными границами.**

Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.

Задача с подвижными границами для функционалов, зависящих от нескольких функций.

Экстремали с угловыми точками.

Односторонние вариации.

### **3. Достаточные условия экстремума.**

Поле экстремалей.

Функция Вейерштрасса.

Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.

### **4. Вариационные задачи на условный экстремум.**

Связи различного вида.

Изопериметрические задачи.

## **III. Образовательные технологии**

Учебная программа – наименование разделов и тем ( <i>в строгом соответствии с разделом II РПД</i> )	Вид занятия	Образовательные технологии
1. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
2. Вариационные задачи с подвижными границами.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
3. Достаточные условия экстремума.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
4. Вариационные задачи на условный экстремум.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лабораторных работ и различных форм самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: установочные лекции, лабораторные работы в интерактивном режиме, выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

Дисциплина предусматривает выполнение контрольных работ, письменных домашних заданий.

## **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

*Текущая аттестация*

Типовые задания:

### **Вариант 1.**

1). Найти экстремали функционала  $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2) dx$ .

2). На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx}] dx \quad ?$$

3). Определить кривую с заданными граничными точками, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади.

### **Вариант 2.**

1). Исследовать на экстремум функционал  $v[y(x)] = \int_0^T (y^2 + (y')^2) dx$ ,

$$y(0) = y_0, \quad y(T) = y_1.$$

2). Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v(z(x, y)) = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

3). Найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \text{ если другая граничная точка может скользить}$$

по прямой  $x = \frac{\pi}{4}$ .

4). Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме

$$\text{функционала } v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 ?$$

### **Вариант 3.**

1). Найти геодезические линии круглого цилиндра  $r = R$ .

2). Написать дифференциальное уравнение экстремалей изопериметрической

задачи об экстремуме функционала  $v[y(x)] = \int_0^{x_1} [p(x)y'^2 + q(x)y^2] dx$  при условии

$$\int_0^{x_1} r(x)y^2 dx = 1; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = 0.$$

3). Найти методом Рунге приближенное решение дифференциального уравнения  $y'' + x^2 y = x$ ;  $y(0) = y(1) = 0$ . Определить  $y_2(x)$  и  $y_3(x)$  и сравнить их значения в точках  $x = 0.25, x = 0.5, x = 0.75$ .

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Задача решена полностью - 5 баллов;

Задача содержит неточности и незначительные ошибки - 4 балла;

Решение содержит грубые ошибки - 2 балла.

*Промежуточный контроль*

## **ПК-2 Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат**

ПК-2.1 Знает и понимает современный математический аппарат

*Типовые задания*

Задание 1.

1. Вариация и ее свойства.

2. Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида

$$\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0.$$

Задание 2.

1. Необходимое условие экстремума функционала.

2. Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.

Задание 3.

1. Исследование на экстремум задач с неподвижными границами. Уравнение Эйлера. Некоторые простейшие случаи интегрируемых уравнений Эйлера.

2. Изопериметрические задачи.

ПК-2.2 Применяет современный математический аппарат к решению научных задач

*Типовые задания*

Задание 1.

1. Найти функцию, на которой может достигаться экстремум

функционала  $v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2) dx$ ,  $y(0) = 0$ , если другая граничная

точка может скользить по прямой  $x = \frac{\pi}{4}$ .

2. Найти методом Ритца приближенное решение дифференциального уравнения  $y'' + x^2 y = x$ ;  $y(0) = y(1) = 0$ . Определить  $y_2(x)$  и  $y_3(x)$  и сравнить их значения в точках  $x = 0.25, x = 0.5, x = 0.75$ .

Задание 2.

1. Определить кривую с заданными граничными точками, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади.
2. Написать дифференциальное уравнение экстремалей изопериметрической задачи об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} [p(x)y'^2 + q(x)y^2] dx \quad \text{при условии} \quad \int_0^{x_1} r(x)y^2 dx = 1; \quad y(0) = 0;$$

$$y(x_1) = 0.$$

Способ проведения – устный.

Критерии оценивания:

Вопрос изложен полностью – 12 баллов;

Ответ на вопрос содержит несущественные неточности - 10 баллов;

Ответ на вопрос содержит грубые ошибки - 4 балла.

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1) Рекомендуемая литература

#### а) Основная литература

1. Хеннер, В. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, основы специальных функций и интегральных уравнений: учебное пособие / В. К. Хеннер, Т. С. Белозерова, М. В. Хеннер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-2592-1. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210038>

2. Тракимус Ю. В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах : учебное пособие / Ю.В. Тракимус. - Новосибирск : НГТУ, 2011. - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=228989](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=228989)

б) Дополнительная литература

1. Рыбаков К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: практический курс: учебное пособие / К.А. Рыбаков, А.С. Якимова, А.В. Пантелеев. - М.: Логос, 2010. - 384 с. - (Новая университетская библиотека). - ISBN 978-5-98704-465-0; [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=84753>

2) Программное обеспечение

<b>Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 46 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)</b>	
Adobe Acrobat Reader DC - Russian	бесплатно
Apache Tomcat 8.0.27	бесплатно
Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
GlassFish Server Open Source Edition 4.1.1	бесплатно
Google Chrome	бесплатно
Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit)	бесплатно
JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3	бесплатно
JetBrains PyCharm Edu 3.0	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus 1.4.0	бесплатно
Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно
MiKTeX 2.9	бесплатно

MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно
NetBeans IDE 8.2	бесплатно
Notepad++	бесплатно
Oracle VM VirtualBox 5.0.2	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.1 pygame-1.9.1	бесплатно
Python 3.4 numpy-1.9.2	бесплатно
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64-bit)	бесплатно
WCF RIA Services V1.0 SP2	бесплатно
WinDjView 2.1	бесплатно
R Studio	бесплатно
Anaconda3 2019.07 (Python 3.7.3 64-bit)	бесплатно

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com);
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>;
3. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>.

Виртуальная образовательная среда ТвГУ (<http://moodle.tversu.ru>)

Научная библиотека ТвГУ (<http://library.tversu.ru>)

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Сайт ТвГУ: <http://homepages.tversu.ru/~s000154/MAPLE/maple.html>

Интернет-университет <http://www.intuit.ru>

## **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 баллов (30 баллов - 1-й модуль и 30 баллов - 2-й модуль).

Обучающемуся, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55–57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

### **Содержание самостоятельной работы**

1. Овладение основными понятиями вариационного исчисления.
2. Решение задач на отыскание экстремалей различных функционалов.
3. Исследование на экстремум различных функционалов.
4. Решение задач на нахождение экстремалей изопериметрических задач.

### **Вопросы к экзамену**

1. Вариация и ее свойства.
2. Необходимое условие экстремума функционала.
3. Исследование на экстремум задач с неподвижными границами. Уравнение Эйлера. Некоторые простейшие случаи интегрируемых уравнений Эйлера.
4. Определение экстремума функционалов, зависящих от нескольких функций, а также от производных более высокого порядка. Уравнение Эйлера-Пуассона.
5. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Уравнение Остроградского.
6. Вариационные задачи в параметрической форме.
7. Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.
8. Задача с подвижными границами для функционалов, зависящих от нескольких функций.
9. Экстремали с угловыми точками.
10. Односторонние вариации.
11. Поле экстремалей.
12. Функция Вейерштрасса.
13. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.
14. Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида  $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ .
15. Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида  $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0$ .

## 16. Изопериметрические задачи.

### **VII. Материально-техническое обеспечение**

Для аудиторной работы.

Учебная аудитория № 212 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, мультимедийный комплекс (доска, проектор, панель управления, переносной ноутбук).
Компьютерный класс №2 факультета ПМиК № 249 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, компьютер, проектор.

Для самостоятельной работы

Помещение для самостоятельной работы Компьютерный класс № 2 факультета ПМиК № 249	Набор учебной мебели, компьютер, проектор.
---	--

### **VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

<b>№ п.п.</b>	<b>Обновленный раздел рабочей программы дисциплины</b>	<b>Описание внесенных изменений</b>	<b>Реквизиты документа, утвердившего изменения</b>
1	11. 2) Программное обеспечение	Внесены изменения в список ПО	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета
2	V. 1) Рекомендуемая литература	Обновление ссылок на литературу	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета

