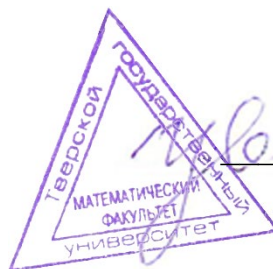


Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 08.04.2025 08:43:19
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП



Цветков В.П.

«10» апреля 2024г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Функциональный анализ

Направление подготовки / Специальность

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)

Математическое и компьютерное моделирование

Для студентов 3 курса очной формы обучения

Составитель:

Михеев С.А.

Тверь, 2024

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины является:

- овладение математическим аппаратом функционального анализа;
- развитие умений применять методы функционального анализа к конкретным математическим объектам в других областях математики.

Задачами освоения дисциплины являются:

- обобщение и систематизация знаний, полученных при изучении математического анализа, линейной алгебры и геометрии;
- усвоение базовых понятий функционального анализа;
- приобретение практических навыков использования аппарата функционального анализа для решения математических задач.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к обязательной части профессионального цикла. Она базируется на знаниях, полученных студентами в ходе изучения дисциплин: «Математический анализ» (дифференциальное и интегральное исчисление, теория функций, теория рядов), «Алгебра и теория чисел», «Аналитическая геометрия», «Комплексный анализ».

Требования к начальному уровню подготовки студента, необходимому для успешного освоения дисциплины: знание основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Дисциплина «Функциональный анализ» формирует у студента компетенции, которые будут использоваться при изучении специальных курсов, в дальнейшей научно-исследовательской работе, а также при выполнении выпускной квалификационной работы.

3. Объем дисциплины: 3 зачетных единицы, 108 академических часов, в том числе:

контактная аудиторная работа: лекции 48 часов, практические занятия 48 часов;

самостоятельная работа: 12 часов.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие. УК-1.2 Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи. УК-1.5 Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.
ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Использует базовые знания в области математики для решения задач математического моделирования естественных и социально-экономических систем. ОПК-1.2 Применяет методы решения задач математического моделирования естественных и социально-экономических систем на основе теоретических знаний в профессиональной деятельности. ОПК-1.3 Проводит консультации по решению конкретных задач математического моделирования.

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения зачет – 6 семестр.

6. Язык преподавания русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с
указанием отведенного на них количества академических часов и видов
учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)			Самостоятельная работа, в том числе контроль (час.)
		Лекции	Практические занятия		
			всего	в т.ч. практическая подготовка	
1. Введение	4	2	2	0	0
2. Элементы теории множеств	12	6	6	0	0
3. Мера Лебега на прямой. Измеримые функции	22	10	10	0	2
4. Интеграл Лебега	18	8	8	0	2
5. Метрические и топологические пространства	18	8	8	0	2
6. Нормированные и топологические линейные пространства	18	8	8	0	2
7. Линейные функционалы и линейные операторы	16	6	6	0	4
ИТОГО	108	48	48	0	12

III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем	Вид занятия	Образовательные технологии
1. Введение	лекция практическое	Традиционные лекционно-семинарские (изучение теоретического материала, решение задач).
2. Элементы теории множеств	лекция практическое	Традиционные лекционно-семинарские (изучение теоретического материала, решение задач).
3. Мера Лебега на прямой. Измеримые функции	лекция практическое	Традиционные лекционно-семинарские (изучение теоретического материала, решение задач).
4. Интеграл Лебега	лекция практическое	Традиционные лекционно-семинарские (изучение теоретического материала, решение задач).
5. Метрические и топологические пространства	лекция практическое	Традиционные лекционно-семинарские (изучение теоретического материала, решение задач).
6. Нормированные и топологические линейные пространства	лекция практическое	Традиционные лекционно-семинарские (изучение теоретического материала, решение задач).
7. Линейные функционалы и линейные операторы	лекция практическое	Традиционные лекционно-семинарские (изучение теоретического материала, решение задач).

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикаторов УК-1.1, УК-1.2

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Уметь формализовать знания в виде формул, необходимых для решения задачи	1. Докажите, что множество $\{2^1, 2^2, 2^3, \dots\}$ является счетным 2. Докажите, что множество нечетных натуральных чисел является счетным. 3. Вычислите интеграл Лебега от следующей функции по отрезку $[0;1]$. $f(x) = \begin{cases} x, & x - \text{иррац.}, & x > \frac{1}{2} \\ x^2, & x - \text{иррац.}, & x < \frac{1}{2} \\ 1, & x - \text{рац.} \end{cases}$	Имеется верное решение, включающее правильный ответ (приведенное доказательство верно) – 5 баллов; - Имеется верное решение части задачи (доказательство приведено не полностью) – 2 балла; - Решение (доказательство) не дано ИЛИ дано неверное решение – 0 баллов

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора УК-1.5

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки	1. Интегрируема ли (по Лебегу) на промежутке $(1; 3]$ данная неограниченная функция $f(x) = \frac{1}{x-1}$? Проверьте по определению . 2. Доказать по определению, что функция $f(x) = x^2 + 1$ является измеримой на множестве $E = [-1; 2]$. 3. Докажите, что указанная функция является метрикой в $\mathbb{R}^2$ и изобразите в этой метрике единичный шар с центром в начале координат: $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.	Дан полный верный ответ – 5 баллов; - Допущена ошибка, не приведшая к существенному искажению смысла – 3 балла; - Допущены логические ошибки, свидетельствующие о непонимании ИЛИ ответ не дан – 0 баллов

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки
индикаторов ОПК-1.1

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Использует базовые знания в области математики для решения задач математического моделирования естественных и социально-экономических систем.	1. Является ли метрикой на числовой прямой ($\mathbb{R}$) следующая функция: а) $\rho(x, y) = x^2 - y^2$; б) $\rho(x, y) = \sqrt{ x - y }$. 2. Приведите доказательство следующих неравенств: а) неравенство Юнга; б) неравенство Минковского для пространств L_p (для интегралов).	Дан полный верный ответ – 5 баллов; - Допущена ошибка, не приведшая к существенному искажению смысла – 3 балла; - Допущены логические ошибки, свидетельствующие о непонимании ИЛИ ответ не дан – 0 баллов

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки
индикаторов ОПК-1.2

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Применяет методы решения задач математического моделирования естественных и социально-экономических систем на основе теоретических знаний в профессиональной деятельности.	1. Построить взаимно-однозначное отображение интервала (a, b) на числовую прямую. 2. Найти Лебеговы множества функции $f(x) = x^2 + 1$, $E = [-1; 2]$ при следующих значениях константы а: 1) $a = 1$; 2) $a = 6$; 3) $a = -1$.	Дан полный верный ответ – 5 баллов; - Допущена ошибка, не приведшая к существенному искажению смысла – 3 балла; - Допущены логические ошибки, свидетельствующие о непонимании ИЛИ ответ не дан – 0 баллов

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки
индикатора ОПК-1.3

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала
---------------------------	--	---

		оценивания
Проводит консультации по решению конкретных задач математического моделирования.	1. Найти расстояние $\rho(x, y)$ между функциями $x(t) = t^3$ и $y(t) = 3t + 4$ в пространстве $C[0, 2]$ ($C[a, b]$ – пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с метрикой $\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} x(t) - y(t)$). 2. Найдите все неподвижные точки отображения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = x^2 - 4x + 6$.	Имеется верное решение, включающее правильный ответ – 5 баллов; - Дано верное решение, но получен неправильный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ В решении имеются лишние или неверные записи, не отделенные от решения – 3 балла; - Имеется верное решение части задачи – 2 балла; - Решение не дано ИЛИ дано неверное решение – 0 баллов

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1. Рекомендуемая литература

а) Основная литература:

[1] Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Электронный ресурс]: учебник / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – 7-е изд. – Москва : Физматлит, 2012. – 573 с. – (Классический университетский учебник). – ISBN 978-5-9221-0266-7. –

URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563> – Режим доступа: по подписке.

[2] Власова, Е. А. Элементы функционального анализа [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-1958-6.

URL: <https://e.lanbook.com/book/67481> — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) Дополнительная литература:

[3] Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной [Электронный ресурс]: учебник / И. П. Натансон. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 560 с. — ISBN 978-5-8114-0136-9.

URL: <https://e.lanbook.com/book/284> — Режим доступа: для авториз. пользователей.

[4] Треногин, В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 240 с. — ISBN 5-9221-0271-0.

URL: <https://e.lanbook.com/book/2342> — Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Программное обеспечение

а) Лицензионное программное обеспечение

MS Office 365 proplus— Акт приема-передачи № 687 от 31 июля 2018

MicrosoftWindows 10 Enterprise— Акт приема-передачи № 687 от 31 июля 2018

MicrosoftOffice 365 proplus— Акт приема-передачи № 687 от 31 июля 2018

MicrosoftWindows 10 Enterprise— Акт приема-передачи № 687 от 31 июля 2018

KasperskyEndpointSecurity 10 для Windows – Акт на передачу прав

№956 от 18 октября 2018 г.

б) Свободно распространяемое программное обеспечение

Adobe Reader XI

Any Video Converter 5.9.0

Google Chrome

WinDjView 2.0.2

3. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com;

2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru>

3. ЭБС IPRbooks <http://www.iprbookshop.ru>;

4. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>;

5. ЭБС BOOK.ru <https://www.book.ru>
6. ЭБС ТвГУ <http://megapro.tversu.ru/megapro/Web>
7. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (подписка на журналы)
https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp
8. Репозиторий ТвГУ <http://eprints.tversu.ru>

4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины:

Общероссийский портал Math-Net.Ru <http://www.mathnet.ru/>

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Методические указания по подготовке к практическим занятиям.

Подготовка к практическим занятиям по дисциплине включает в себя:

- изучение лекционного материала, необходимого для решения практических задач;
- решение практических задач, заданных преподавателем на дом;
- подготовку к контрольным и самостоятельным работам.

При подготовке к практическим занятиям рекомендуется изучить теоретический материал соответствующих разделов литературы из обязательного и дополнительного списков.

Темы занятий.

Тема 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Понятие множества. Операции над множествами. Отображения. Разбиения на классы. Отношения эквивалентности. Понятие мощности множества.

Тема 3. МЕРА ЛЕБЕГА. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Мера элементарных множеств. Лебегова мера плоских множеств. Общее понятие меры. Лебеговское продолжение меры. Измеримые по Лебегу множества. Свойства меры Лебега.

Определение и основные свойства измеримых функций. Действия над измеримыми функциями. Эквивалентные функции. Сходимости по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина.

Тема 4. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Определение интеграла Лебега. Класс суммируемых функций. Интеграл Лебега от измеримой ограниченной функции одного переменного. Интеграл Лебега от измеримой неограниченной функции одного переменного. Предельный переход под знаком интеграла. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.

Тема 5. МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие метрического пространства. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений и его применения. Топологические пространства.

Тема 6. НОРМИРОВАННЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение и примеры линейных пространств. Определение и примеры нормированных пространств. Банаховы пространства. Определение евклидовых и унитарных пространств. Подпространства нормированного пространства. Фактор-пространства нормированного пространства. Линейные топологические пространства.

Тема 7. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение и примеры линейных операторов. Непрерывность и ограниченность линейных операторов. Пространство линейных непрерывных операторов. Обратные операторы и теорема Банаха о гомеоморфизме. Спектр оператора. Резольвента. Теоремы о замкнутом графике и об открытом отображении. Определение и примеры линейных функционалов. Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах. Теорема Хана-Банаха. Сопряженные пространства – определение и примеры.

Вопросы к зачету (примерный список)

1. Понятие множества. Операции над множествами.
2. Отображения. Разбиения на классы. Отношения эквивалентности.
3. Счетные множества. Несчетность множества действительных чисел. Понятие мощности множества.
4. Определение и примеры полных метрических пространств.
5. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений и его применения.
6. Топологические пространства.
7. Мера элементарных множеств.
8. Мера Лебега плоских множеств.
9. Общее понятие меры.
10. Лебеговское продолжение меры.
11. Определение и основные свойства измеримых функций.
12. Определение интеграла Лебега.
13. Класс суммируемых функций.
14. Предельный переход под знаком интеграла.
15. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.
16. Определение и примеры линейных пространств.
17. Определение и примеры нормированных пространств.
18. Банаховы пространства.
19. Евклидовы и унитарные пространства.
20. Подпространства нормированного пространства.
21. Фактор-пространства нормированного пространства.
22. Линейные топологические пространства. Определение и примеры.
23. Определение и примеры линейных операторов.

24. Непрерывность и ограниченность линейных операторов.
25. Пространство линейных непрерывных операторов.
26. Обратные операторы, обратимость.
27. Теорема Банаха о гомеоморфизме.
28. Спектр оператора. Резольвента.
29. Теорема о замкнутом графике.
30. Определение и примеры линейных функционалов.
31. Теорема Хана-Банаха.

Требования к рейтинг-контролю:

учебный материал разбивается на 2 модуля.

1 модуль

Вид контроля	Формы контроля	Максимальный балл
Текущий контроль	работа на занятиях	25
	посещаемость	5
Рубежный контроль	Контрольная(ые) работа(ы)	20
Общая сумма баллов:		50

2 модуль

Вид контроля	Формы контроля	Максимальный балл
Текущий контроль	работа на занятиях	25
	посещаемость	5
Рубежный контроль	Контрольная(ые) работа(ы)	20
Общая сумма баллов:		50

Рейтинг студента складывается из баллов, полученных в каждом модуле. Форма итоговой аттестации – зачет. Максимальная сумма баллов за семестр – 100.

VII. Материально-техническое обеспечение

Для аудиторной работы

Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы	Материально-техническое оснащение помещений
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 19 (170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)	Набор учебной мебели, меловая доска, переносной ноутбук. Интерактивная система Smart Board 880I4 со встроенным проектором и системой управления

Для организации самостоятельной работы студентов необходимо наличие персональных компьютеров с доступом в Интернет.

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1.			
2.			