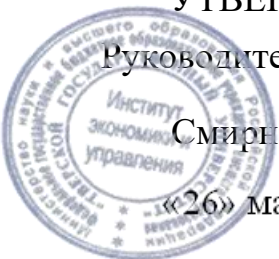


Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 22.07.2025 11:12:55  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fec2ad1bf35f08

УП: 38.03.05 Бизнес-  
информатика  
2025.plx

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФГБОУ ВО «ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ  
Руководитель ООП  
Смирнова О.В.  
«26» марта 2025 г.



Рабочая программа дисциплины

**Линейная алгебра**

|                              |                                    |
|------------------------------|------------------------------------|
| Закреплена за<br>кафедрой:   | <b>Экономической теории</b>        |
| Направление<br>подготовки:   | <b>38.03.05 Бизнес-информатика</b> |
| Направленность<br>(профиль): | <b>Бизнес-аналитика</b>            |
| Квалификация:                | <b>Бакалавр</b>                    |
| Форма обучения:              | <b>очная</b>                       |
| Семестр:                     | <b>1,2</b>                         |

Программу составил(и):

*без уч. степ., старший преподаватель, Васильева Екатерина Васильевна*

Тверь, 2025

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

### Цели освоения дисциплины (модуля):

Целью освоения дисциплины «Линейная алгебра» является формирование у обучающихся компетенций в области аналитической и организационно-управленческой деятельности в части:

- применения математического аппарата для решения профессиональных задач выпускника;
- анализа данных, необходимых для решения конкретных экономических задач и подготовки аналитических отчетов;
- проведения расчетов экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующего субъекта.

### Задачи :

Задачами освоения дисциплины являются формирование у обучающихся знаний, умений и навыков в области алгебраических методов, используемых для исследования, анализа и решения теоретических и практических проблем экономики.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП

Цикл (раздел) ОП: Б1.О

### Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к дисциплинам обязательной части учебного плана Блока 1 «Дисциплины» и направлена на формирование у обучающихся универсальных и общепрофессиональных компетенций.

Предпосылками для изучения дисциплины являются знания и умения, полученные в ходе освоения предметов «Алгебра», «Геометрия», «Информатика» в общеобразовательной школе, а также математический анализ, изучаемый студентами в 1 и 2 семестрах.

**Дисциплины (модули) и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**

Методы оптимальных решений

Системный анализ в экономике

Теория вероятностей и математическая статистика

Эконометрика

Интеллектуальный анализ данных

Финансовая математика

## 3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

|                         |        |
|-------------------------|--------|
| Общая трудоемкость      | 10 ЗЕТ |
| Часов по учебному плану | 360    |
| <b>в том числе:</b>     |        |
| самостоятельная работа  | 236    |
| часов на контроль       | 36     |

## 4. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫЕ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

ОПК-4.3: Применяет стандартные математические (в том числе, эконометрические) модели и методы для описания статистических зависимостей, выявления тенденций изменения экономических показателей, обнаружения в больших массивах данных ранее неизвестных закономерностей, необходимых для расчета прогнозных значений и принятия управленческих решений

УК-1.1: Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие

## 5. ВИДЫ КОНТРОЛЯ

| Виды контроля в семестрах: |   |
|----------------------------|---|
| экзамены                   | 2 |
| зачеты                     | 1 |

## 6. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ

Язык преподавания: русский.

## 7. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

| №    | Наименование разделов и тем                                                 | Вид занятия | Сем. | Часов | Примечание |
|------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------|------|-------|------------|
|      | Раздел 1. Матричная алгебра. Элементы аналитической геометрии               |             |      |       |            |
| 1.1  | Тема 1. Системы векторов. N-мерное линейное векторное пространство          | Лек         | 1    | 2     |            |
| 1.2  | Тема 1. Системы векторов. N-мерное линейное векторное пространство          | Пр          | 1    | 2     |            |
| 1.3  | Тема 1. Системы векторов. N-мерное линейное векторное пространство          | Ср          | 1    | 16    |            |
| 1.4  | Тема 2. Матрицы. Действия над матрицами                                     | Лек         | 1    | 4     |            |
| 1.5  | Тема 2. Матрицы. Действия над матрицами                                     | Пр          | 1    | 3     |            |
| 1.6  | Тема 2. Матрицы. Действия над матрицами                                     | Ср          | 1    | 26    |            |
| 1.7  | Тема 3. Определители. Свойства определителей. Правила расчёта определителей | Лек         | 1    | 4     |            |
| 1.8  | Тема 3. Определители. Свойства определителей. Правила расчёта определителей | Пр          | 1    | 3     |            |
| 1.9  | Тема 3. Определители. Свойства определителей. Правила расчёта определителей | Ср          | 1    | 28    |            |
| 1.10 | Тема 4. Системы линейных уравнений (СЛУ). Методы исследования и решения СЛУ | Лек         | 1    | 7     |            |
| 1.11 | Тема 4. Системы линейных уравнений (СЛУ). Методы исследования и решения СЛУ | Пр          | 1    | 9     |            |
| 1.12 | Тема 4. Системы линейных уравнений (СЛУ). Методы исследования и решения СЛУ | Ср          | 1    | 40    |            |

|      |                                                                                                                     |     |   |    |  |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---|----|--|
| 1.13 | Тема 5. Аналитическая геометрия на плоскости                                                                        | Лек | 2 | 2  |  |
| 1.14 | Тема 5. Аналитическая геометрия на плоскости                                                                        | Пр  | 2 | 4  |  |
| 1.15 | Тема 5. Аналитическая геометрия на плоскости                                                                        | Ср  | 2 | 20 |  |
| 1.16 | Тема 6. Аналитическая геометрия в пространстве                                                                      | Лек | 2 | 2  |  |
| 1.17 | Тема 6. Аналитическая геометрия в пространстве                                                                      | Пр  | 2 | 4  |  |
| 1.18 | Тема 6. Аналитическая геометрия в пространстве                                                                      | Ср  | 2 | 20 |  |
|      | Раздел 2. Элементы матричного анализа                                                                               |     |   |    |  |
| 2.1  | Тема 7. Линейные операторы                                                                                          | Лек | 2 | 1  |  |
| 2.2  | Тема 7. Линейные операторы                                                                                          | Ср  | 2 | 6  |  |
| 2.3  | Тема 8. Собственные векторы линейных операторов                                                                     | Лек | 2 | 1  |  |
| 2.4  | Тема 8. Собственные векторы линейных операторов                                                                     | Пр  | 2 | 2  |  |
| 2.5  | Тема 8. Собственные векторы линейных операторов                                                                     | Ср  | 2 | 10 |  |
| 2.6  | Тема 9. Квадратичные формы                                                                                          | Лек | 2 | 1  |  |
| 2.7  | Тема 7. Квадратичные формы                                                                                          | Пр  | 2 | 2  |  |
| 2.8  | Тема 9. Квадратичные формы                                                                                          | Ср  | 2 | 10 |  |
|      | Раздел 3. Основы линейного программирования                                                                         |     |   |    |  |
| 3.1  | Тема 10. Основные понятия линейного программирования. Общая математическая модель задачи линейного программирования | Лек | 2 | 2  |  |
| 3.2  | Тема 10. Основные понятия линейного программирования. Общая математическая модель задачи линейного программирования | Пр  | 2 | 6  |  |
| 3.3  | Тема 10. Основные понятия линейного программирования. Общая математическая модель задачи линейного программирования | Ср  | 2 | 12 |  |
| 3.4  | Тема 11. Графический метод решения задач линейного программирования с двумя переменными                             | Лек | 2 | 4  |  |
| 3.5  | Тема 11. Графический метод решения задач линейного программирования с двумя переменными                             | Пр  | 2 | 10 |  |
| 3.6  | Тема 11. Графический метод решения задач линейного программирования с двумя переменными                             | Ср  | 2 | 20 |  |

|      |                                                                                                                                  |         |   |    |  |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|---|----|--|
| 3.7  | Тема 12. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Идея и геометрическая суть                                  | Лек     | 2 | 1  |  |
| 3.8  | Тема 12. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Идея и геометрическая суть                                  | Пр      | 2 | 2  |  |
| 3.9  | Тема 12. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Идея и геометрическая суть                                  | Ср      | 2 | 8  |  |
| 3.10 | Тема 13. Основы теории двойственности линейного программирования. Теоремы теории двойственности и их экономическая интерпретация | Лек     | 2 | 4  |  |
| 3.11 | Тема 13. Основы теории двойственности линейного программирования. Теоремы теории двойственности и их экономическая интерпретация | Пр      | 2 | 6  |  |
| 3.12 | Тема 13. Основы теории двойственности линейного программирования. Теоремы теории двойственности и их экономическая интерпретация | Ср      | 2 | 20 |  |
| 3.13 | Экзамен, подготовка к экзамену                                                                                                   | Экзамен | 2 | 36 |  |

### Образовательные технологии

Образовательные технологии в процессе преподавания линейной алгебры использование интерактивных лекций, мультимедийных презентаций, визуализацию абстрактных понятий, упрощающих их понимание. Применение цифровых платформ позволяет студентам самостоятельно изучать материал вне аудиторий. Использование кейсов, практических заданий, деловых игр, связанных с решением реальных экономических проблем, помогает продемонстрировать практическое применение теории линейной алгебры в профессиональной деятельности будущих специалистов экономики. Организация групповых проектов способствует развитию навыков командной работы и анализа данных.

Интерактивные методы вовлечения студентов позволяют повысить мотивацию учащихся и развивать критическое мышление. Например, решение кейсов, участие в деловых играх предоставляют возможность моделировать экономические процессы и ситуации, основанные на применении матриц, определителей и решений систем уравнений, что способствует развитию аналитического мышления и вычислительных навыков студентов. Дистанционные формы взаимодействия способствуют повышению доступности учебного материала, особенно в условиях удаленного образования.

### Список образовательных технологий

|   |                                                                                                                                                              |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Игровые технологии                                                                                                                                           |
| 2 | Информационные (цифровые) технологии                                                                                                                         |
| 3 | Технологии развития критического мышления                                                                                                                    |
| 4 | Активное слушание                                                                                                                                            |
| 5 | Методы группового решения творческих задач (метод Дельфи, метод 6–6, метод развивающей кооперации, мозговой штурм (метод генерации идей), нетворкинг и т.д.) |
| 6 | Занятия с применением затрудняющих условий                                                                                                                   |

## 8. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 8.1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации

Контрольные вопросы, 1 семестр:

1. Понятие матрицы. Виды матриц (матрица-строка, матрица-столбец, квадратная, диагональная, единичная, нулевая, верхняя треугольная, нижняя треугольная).
2. Операции над матрицами (умножение матрицы на число, сложение матриц, вычитание матриц,) и их свойства.
3. Операции над матрицами (транспонирование матрицы, умножение матриц, возведение в степень обращение матрицы) и их свойства.
4. Понятие определителя квадратной матрицы. Обозначения.
5. Понятие минора, алгебраического дополнения элемента матрицы.
6. Правило расчета определителя 2-го порядка.
7. Правила расчета определителя 3-го порядка (правило треугольников, правило Саррюса, правило разложения по элементам строки или столбца).
8. Теорема Лапласа (правило расчета определителя любого порядка  $n$ ).
9. Свойства определителей.
10. Понятие невырожденной матрицы.
11. Определение обратной матрицы.
12. Условие существования обратной матрицы.
13. Расчет обратной матрицы по формуле с помощью присоединенной матрицы.
14. Матричный метод решения СЛАУ (при  $m=n$ ).
15. Метод Крамера решения СЛАУ (при  $m=n$ ).
16. Метод Гаусса решения СЛАУ.
17. Теорема о существовании решения СЛАУ.
18. Метод Жордана – Гаусса решения СЛАУ. Понятие базисных, свободных переменных, базисных решений.
19. Понятие системы  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными и ее решения.
20. Совместные и несовместные системы. Определенные и неопределенные системы.
21. Равносильные системы.
22. Матричная форма записи СЛАУ. Понятие матрицы системы.
23. Методы решения СЛАУ.
24. Система  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными и ее решение с использованием обратной матрицы.
25. Решение системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Крамера.
26. Решение системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Гаусса. Понятие расширенной матрицы. Эквивалентные преобразования расширенной матрицы. Прямой и обратный ход метода Гаусса.

Контрольные вопросы, 2 семестр:

1. Понятие квадратичной формы. Каноническая квадратичная форма.
2. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
3. Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП).
4. Понятия целевой функции, системы ограничений, допустимого решения, оптимального решения ЗЛП.
5. Постановка задачи оптимального планирования производства продукции.
6. Постановка задачи о составлении рациона (задачи о диете).
7. Постановка транспортной задачи как специальной ЗЛП.
8. Стандартная форма ЗЛП с двумя переменными.
9. Теоремы о множестве решений линейного неравенства, совместной
10. Геометрическая интерпретация замкнутого многоугольника решений,

неограниченной многоугольной области решений, пустого множества решений (при  $n=2$ ).

11. Понятие линии уровня и вектора нормали целевой функции (при  $n=2$ ). Правила их построения.

12. Нахождение оптимального решения ЗЛП графическим методом с помощью вектора нормали и линии уровня целевой функции (при  $n=2$ ).

13. Геометрическая интерпретация единственного оптимального решения, множества оптимальных решений, отсутствия оптимальных решений при графическом методе решения ЗЛП.

14. Алгоритм графического метода решения задачи линейного программирования.

15. Основная теорема линейного программирования (теорема о соотношении оптимального решения ЗЛП и угловых точек множества допустимых решений ЗЛП).

16. Понятие допустимого базисного решения (ДБР). Теорема о соответствии ДБР и угловых точек многогранника решений.

17. Геометрический смысл симплекс-метода решения ЗЛП. Суть алгоритма симплекс-метода решения ЗЛП.

18. Понятие пары двойственных задач. Виды пар двойственных задач.

19. Экономическая интерпретация переменных двойственной задачи (при исходной задаче оптимального планирования производства).

20. Экономическая интерпретация двойственной задачи (при исходной задаче оптимального планирования производства).

21. Первая теорема двойственности и ее экономический смысл.

22. Вторая теорема двойственности и ее экономический смысл.

Шкала оценки ответов на контрольные вопросы:

- ° Ответ на вопрос правильный и полный – 1 балл.
- ° Ответ на вопрос по сути правильный, но содержит незначительные неточности – 0,7 балла.
- ° Ответ на вопрос содержит значительные неточности – 0,5 балла.
- ° Ответ на вопрос неполный и содержит значительные неточности – 0,3 балла.
- ° Ответ не отражает сути понятия, ответ не дан вообще или ответ свидетельствует о непонимании вопроса – 0 баллов.

Типовые задачи для текущей аттестации и шкала оценки выполнения задач приведены в Приложении 1.

Шкала оценки выполнения задач:

- ° Задание выполнено в полном объеме без ошибок – 5 баллов.
- ° При выполнении задания допущена 1 незначительная ошибка – 4 балла.
- ° При выполнении задания допущены 2 незначительные ошибки – 3 балла.
- ° При выполнении задания допущено больше 2 незначительных ошибок или имеются существенные ошибки – 2 балла.
- ° Задание практически не выполнено – 1 балл.
- ° Задание не выполнено – 0 баллов.

## **8.2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации**

Планируемый результат по УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач:

УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие.

Планируемые результаты по ОПК-4 Способен понимать принципы работы информационных технологий; использовать информацию, методы и программные средства ее сбора, обработки и анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений:

ОПК-4.3. Применяет стандартные математические (в том числе, эконометрические) модели и методы для описания статистических зависимостей, выявления тенденций

изменения экономических показателей, обнаружения в больших массивах данных ранее неизвестных закономерностей, необходимых для расчета прогнозных значений и принятия управленческих решений

▲ 1 семестр. Типовое контрольное задание на зачёте по дисциплине «Линейная алгебра» состоит из двух частей:

- 1 часть – два теоретических вопроса по темам дисциплины.
- 2 часть – практическое задание с обоснованием применяемого метода решения и пояснением основных понятий.

Примерные теоретические вопросы:

1. Понятие матрицы. Виды матриц (матрица-строка, матрица-столбец, квадратная, диагональная, единичная, нулевая, верхняя треугольная, нижняя треугольная).
2. Операции над матрицами (умножение матрицы на число, сложение матриц, вычитание матриц,) и их свойства.
3. Операции над матрицами (транспонирование матрицы, умножение матриц, возведение в степень обращение матрицы) и их свойства.
4. Понятие определителя квадратной матрицы. Обозначения.
5. Понятие минора, алгебраического дополнения элемента матрицы.
6. Правило расчета определителя 2-го порядка.
7. Матричный метод решения СЛАУ (при  $m=n$ ).
8. Метод Крамера решения СЛАУ (при  $m=n$ ).
9. Метод Гаусса решения СЛАУ.
10. Теорема о существовании решения СЛАУ.

Примерные практические задания для проведения промежуточной аттестации (форма отчётности - зачёт) приведены в приложении 2.

Шкала оценки степени сформированности компетенций обучающихся на промежуточной аттестации (форма отчётности - зачёт) в рамках рейтинговой системы, 1 семестр (по очной форме обучения)

- Контрольное задание на зачете по части 1 (индикатор - УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие) - 20 рейтинговых баллов.

- Контрольное задание на зачете по части 2 (индикатор - Часть 2 ОПК-4.3 Применяет стандартные математические (в том числе, эконометрические) модели и методы для описания статистических зависимостей, выявления тенденций изменения экономических показателей, обнаружения в больших массивах данных ранее неизвестных закономерностей, необходимых для расчета прогнозных значений и принятия управленческих решений) - 20 рейтинговых баллов.

Итого: 40 баллов.

▲ 2 семестр. Типовое контрольное задание на экзамене по дисциплине «Линейная алгебра» состоит из двух частей:

- 1 часть – два теоретических вопроса по темам дисциплины.
- 2 часть – практическое задание с обоснованием применяемого метода решения и пояснением основных понятий.

Примерные теоретические вопросы:

1. Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП).
2. Понятия целевой функции, допустимого решения, оптимального решения задачи линейного программирования.
3. Постановка задачи оптимального планирования производства продукции.
4. Постановка задачи о составлении рациона (задачи о диете).
5. Понятие области допустимых решений задачи линейного программирования при  $n=2$ .
6. Правила построения многоугольника решений (области допустимых решений)

задачи линейного программирования (при  $n=2$ ). Виды многоугольника решений.

7. Понятие вектора нормали (градиента) целевой функции задачи линейного программирования.

8. Алгоритм графического метода решения задачи линейного программирования с двумя переменными.

9. Постановка транспортной задачи как специальной задачи линейного программирования.

10. Построение начального допустимого плана перевозок груза по методу наименьшего тарифа при решении транспортной задачи.

Примерные практические задания для проведения промежуточной аттестации (форма отчётности - экзамен) приведены в приложении 3.

Шкала оценки степени сформированности компетенций обучающихся на промежуточной аттестации (форма отчётности - экзамен) в рамках рейтинговой системы, 2 семестр (по очной форме обучения)

- Контрольное задание на зачете по части 1 (индикатор - УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие) - 20 рейтинговых баллов.

- Контрольное задание на зачете по части 2 (индикатор - Часть 2 ОПК-4.3 Применяет стандартные математические (в том числе, эконометрические) модели и методы для описания статистических зависимостей, выявления тенденций изменения экономических показателей, обнаружения в больших массивах данных ранее неизвестных закономерностей, необходимых для расчета прогнозных значений и принятия управленческих решений) - 20 рейтинговых баллов.

Итого: 40 баллов.

Форма проведения промежуточной аттестации: устная и письменная.

### **8.3. Требования к рейтинг-контролю**

Требования к рейтинг-контролю

Рейтинговый контроль знаний осуществляется в соответствии с Положением о рейтинговой системе обучения в ТвГУ.

Распределение баллов в 1 семестре (форма отчётности - зачёт) по видам работы в рамках рейтинговой системы:

- ° работа в семестре - 100 баллов,

в том числе:

- текущий контроль - 60 баллов;
- рейтинговый контроль - 40 баллов;
- зачет - по факту.

Итого: 100 баллов.

Распределение баллов во 2 семестре (форма отчётности - экзамен) по видам работы в рамках рейтинговой системы:

- ° работа в семестре - 60 баллов,

в том числе:

- текущий контроль - 40 баллов;
- рейтинговый контроль - 20 баллов;
- ° экзамен - 40 баллов.

Итого: 100 баллов.

## 9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### Рекомендуемая литература

#### Основная

| Шифр  | Литература                                                                                                                                                                                                             |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Л.1.1 | Ключин, Высшая математика для экономистов. Практический курс, Москва: Юрайт, 2024, ISBN: 978-5-534-18105-0,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/535631">https://urait.ru/bcode/535631</a>                          |
| Л.1.2 | Кремер, Фридман, Тришин, Линейная алгебра, Москва: Юрайт, 2024, ISBN: 978-5-534-08547-1,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/535848">https://urait.ru/bcode/535848</a>                                             |
| Л.1.3 | Малугин, Рощина, Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач, Москва: Юрайт, 2024, ISBN: 978-5-534-02976-5,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/536498">https://urait.ru/bcode/536498</a> |

#### Дополнительная

| Шифр   | Литература                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Л.2.1  | Бобрик, Гринцевичюс, Матвеев, Рудык, Сагитов, Смагина, Шершнев, Высшая математика для экономистов: сборник задач, Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2019, ISBN: 978-5-16-010074-6,<br>URL: <a href="https://znanium.com/catalog/document?id=327813">https://znanium.com/catalog/document?id=327813</a> |
| Л.2.10 | Татарников, Бирюкова, Сагитов, Линейная алгебра и линейное программирование. Практикум, Москва: Юрайт, 2024, ISBN: 978-5-9916-9800-9,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/538774">https://urait.ru/bcode/538774</a>                                                                                               |
| Л.2.11 | Татарников, Чуйко, Шершнев, Линейная алгебра, Москва: Юрайт, 2023, ISBN: 978-5-9916-3568-4,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/535255">https://urait.ru/bcode/535255</a>                                                                                                                                         |
| Л.2.12 | Кремер, Путко, Тришин, Фридман, Высшая математика для экономистов, Москва: Издательство "ЮНИТИ-ДАНА", 2017, ISBN: 978-5-238-00991-9,<br>URL: <a href="https://znanium.com/catalog/document?id=341261">https://znanium.com/catalog/document?id=341261</a>                                                              |
| Л.2.13 | Лубягина, Вечтомов, Линейная алгебра, Москва: Юрайт, 2021, ISBN: 978-5-534-10594-0,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/475493">https://urait.ru/bcode/475493</a>                                                                                                                                                 |
| Л.2.14 | Шевцов, Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты, Москва: Издательство "Магистр", 2022, ISBN: 978-5-9776-0258-7,<br>URL: <a href="https://znanium.com/catalog/document?id=399473">https://znanium.com/catalog/document?id=399473</a>                                                                             |
| Л.2.2  | Бортаковский, Пантелеев, Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум, Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2023, ISBN: 978-5-16-010206-1,<br>URL: <a href="https://znanium.com/catalog/document?id=432197">https://znanium.com/catalog/document?id=432197</a>                                   |
| Л.2.3  | Бортаковский, Пантелеев, Линейная алгебра в примерах и задачах, Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2023, ISBN: 978-5-16-010586-4,<br>URL: <a href="https://znanium.com/catalog/document?id=432198">https://znanium.com/catalog/document?id=432198</a>                                                   |
| Л.2.4  | Шилин, Линейная алгебра. Задачник, Москва: Юрайт, 2021, ISBN: 978-5-534-14382-9,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/477492">https://urait.ru/bcode/477492</a>                                                                                                                                                    |
| Л.2.5  | Татарников, Бирюкова, Сагитов, Линейная алгебра и линейное программирование. Практикум, Москва: Юрайт, 2021, ISBN: 978-5-9916-9800-9,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/471976">https://urait.ru/bcode/471976</a>                                                                                               |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Л.2.6 | Сабитов, Михалев, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Москва: Юрайт, 2021, ISBN: 978-5-534-08941-7,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/473302">https://urait.ru/bcode/473302</a>                                                                       |
| Л.2.7 | Малугин, Рощина, Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач, Москва: Юрайт, 2020, ISBN: 978-5-534-02976-5,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/450583">https://urait.ru/bcode/450583</a>                                              |
| Л.2.8 | Бортаковский, Пантелеев, Линейная алгебра в примерах и задачах, Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2022, ISBN: 978-5-16-010586-4,<br>URL: <a href="https://znanium.com/catalog/document?id=400396">https://znanium.com/catalog/document?id=400396</a> |
| Л.2.9 | Пахомова, Рожкова, Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий, Москва: Юрайт, 2021, ISBN: 978-5-534-08428-3,<br>URL: <a href="https://urait.ru/bcode/470220">https://urait.ru/bcode/470220</a>                                                     |

### **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"**

|    |                                                                                                                                                                                             |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Э1 | База статистических данных «Финансово-экономические показатели РФ» :<br><a href="https://minfin.gov.ru/ru/statistics/">https://minfin.gov.ru/ru/statistics/</a>                             |
| Э2 | Официальный интернет-портал правовой информации : <a href="http://pravo.gov.ru/">http://pravo.gov.ru/</a>                                                                                   |
| Э3 | Сводный каталог фондов российских библиотек АРБИКОН:<br><a href="https://mars.arbicon.ru/index.php">https://mars.arbicon.ru/index.php</a>                                                   |
| Э4 | Федеральный образовательный портал «Экономика Социология Менеджмент» :<br><a href="http://ecsocman.hse.ru">http://ecsocman.hse.ru</a>                                                       |
| Э5 | ЭБС ЮРАЙТ : <a href="https://urait.ru/">https://urait.ru/</a>                                                                                                                               |
| Э6 | Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU :<br><a href="https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp?">https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp?</a> |
| Э7 | ЭБС Znanium.com : <a href="https://znanium.com/">https://znanium.com/</a>                                                                                                                   |
| Э8 | ЭБС Университетская библиотека online : <a href="https://biblioclub.ru">https://biblioclub.ru</a>                                                                                           |

### **Перечень программного обеспечения**

|   |                                            |
|---|--------------------------------------------|
| 1 | Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows |
| 2 | Adobe Acrobat Reader                       |
| 3 | Google Chrome                              |
| 4 | OpenOffice                                 |
| 5 | Mozilla Firefox                            |
| 6 | Mathcad 15 M010                            |
| 7 | MATLAB R2012b                              |
| 8 | Многофункциональный редактор ONLYOFFICE    |

### **Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

|   |                                                                                   |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Виртуальный читальный зал диссертаций Российской государственной библиотеки (РГБ) |
| 2 | ИПС «Законодательство России»                                                     |
| 3 | Репозиторий ТвГУ                                                                  |
| 4 | Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (подписка на журналы)                  |
| 5 | ЭБС BOOK.ru                                                                       |
| 6 | ЭБС ТвГУ                                                                          |

|    |                                         |
|----|-----------------------------------------|
| 7  | ЭБС «Лань»                              |
| 8  | ЭБС IPRbooks                            |
| 9  | ЭБС «Университетская библиотека онлайн» |
| 10 | ЭБС «ЮРАИТ»                             |
| 11 | ЭБС «ZNANIUM.COM»                       |
| 12 | СПС "КонсультантПлюс"                   |
| 13 | СПС "ГАРАНТ"                            |

## 10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

| Аудит-я | Оборудование                                                 |
|---------|--------------------------------------------------------------|
| 7-112   | комплект учебной мебели, переносной ноутбук, проектор, доска |
| 7-105   | комплект учебной мебели, компьютеры, доска                   |
| 7-106   | комплект учебной мебели, компьютеры, доска                   |

## 11. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методические рекомендации по подготовке к лекционным, практическим занятиям и по организации самостоятельной работы

Самостоятельная работа начинается до прихода студента на лекцию. Целесообразно использование «системы опережающего чтения», т.е. предварительного прочтения лекционного материала, содержащегося в учебниках и учебных пособиях, закладывающего базу для более глубокого восприятия лекции. Работа над лекционным материалом включает два основных этапа: конспектирование лекций и последующую работу над лекционным материалом. Под конспектированием подразумевают составление конспекта, т.е. краткого письменного изложения содержания чего-либо (устного выступления – речи, лекции, доклада и т.п. или письменного источника – документа, статьи, книги и т.п.).

Методика работы при конспектировании устных выступлений значительно отличается от методики работы при конспектировании письменных источников. Конспектируя письменные источники, студент имеет возможность неоднократно прочитать нужный отрывок текста, поразмыслить над ним, выделить основные мысли автора, кратко сформулировать их, а затем записать. При необходимости он может отметить и свое отношение к этой точке зрения. Слушая же лекцию, студент большую часть комплекса указанных выше работ должен откладывать на другое время, стремясь использовать каждую минуту на запись лекции, а не на ее осмысление – для этого уже не остается времени. Поэтому при конспектировании лекции рекомендуется на каждой странице отделять поля для последующих записей в дополнение к конспекту.

Записав лекцию или составив ее конспект, не следует оставлять работу над лекционным материалом до начала подготовки к экзамену. Нужно проделать как можно раньше ту работу, которая сопровождает конспектирование письменных источников и которую не удалось сделать во время записи лекции: прочесть свои записи, расшифровав отдельные сокращения, проанализировать текст, установить логические связи между его элементами, в ряде случаев показать их графически, выделить главные мысли, отметить вопросы, требующие дополнительной обработки, в частности, консультации преподавателя. При работе над текстом лекции студенту необходимо обратить особое внимание на

проблемные вопросы, поставленные преподавателем при чтении лекции, а также на его задания и рекомендации.

Перечень вопросов, подлежащих изучению, приведен в данной рабочей программе дисциплины (контрольные вопросы для проведения текущей аттестации; вопросы для подготовки к экзамену). Не все эти вопросы будут достаточно полно раскрыты на лекциях. Отдельные вопросы будут освещены недостаточно полно или вообще не будут затронуты. Поэтому, проработав лекцию по конспекту, необходимо сравнить перечень поднятых в ней вопросов с тем перечнем, который приведен в рабочей программе дисциплины (контрольные вопросы для проведения текущей аттестации; вопросы для подготовки к экзамену), и изучить ряд вопросов по учебным пособиям, дополняя при этом конспект лекций.

Студентам заочной формы обучения необходимо обратить внимание на то, что как видно из п. II “Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий” (для заочной формы обучения), на сессии будут прочитаны лекции не по всем темам курса. Часть тем будет вынесена на самостоятельное изучение студентами, прежде всего с помощью учебных пособий. Следует помнить, что работа с учебными пособиями не имеет ничего общего со сквозным пограничным чтением текста. Она должна быть направлена на поиски ответов на конкретно поставленные вопросы (контрольные вопросы для проведения текущей аттестации; вопросы для подготовки к экзамену). Работая с учебными пособиями, не следует забывать о справочных изданиях.

При работе над темами, которые вынесены на самостоятельное изучение, студент должен самостоятельно выделить наиболее важные, узловые проблемы, как это в других темах делалось преподавателем. Здесь не следует с целью экономии времени подходить к работе поверхностно, ибо в таком случае повышается опасность "утонуть" в обилии материала, упустить центральные проблемы. Результатом самостоятельной работы должно стать собственное самостоятельное представление студента об изученных вопросах.

Самостоятельная работа по изучению тем дисциплины по учебным пособиям не должна состоять из сквозного чтения или просмотра текста. Она должна включать вначале ознакомительное чтение, а затем поиск ответов на конкретные вопросы. Основная трудность для студентов заключается здесь в необходимости усвоения, понимания и запоминания значительных объемов материала. Эту трудность, связанную, прежде всего, с дефицитом времени, можно преодолеть путем усвоения интегрального алгоритма чтения.

При подготовке к практическим занятиям следует закрепить полученные теоретические знания по теме и получить практические навыки в их применении путем рассмотрения примеров решения задач по изучаемой теме, рассмотренных в рекомендованных учебных пособиях.

В процессе самостоятельной работы большое значение имеют консультации с преподавателем, в ходе которых можно решить многие проблемы изучаемого курса, уяснить сложные вопросы. При возникновении трудностей в изучении каких-либо вопросов целесообразно попытаться уяснить их, воспользовавшись другим рекомендованным учебным пособием. Если изучение непонятого материала по другому учебному пособию не привело к его усвоению, то следует обратиться за консультацией к преподавателю данной дисциплины.

#### **▲ Методические рекомендации по подготовке к зачету**

Зачет - важный этап в учебном процессе, имеющий целью проверку знаний, выявление умений применять полученные знания к решению практических задач. Как подготовка к зачету, так и сам зачет - форма активизации и систематизации полученных знаний, их углубления и закрепления. Подготовка к зачетам для студентов, особенно заочной формы обучения, всегда осложняется дефицитом времени.

Для подготовки к зачету необходимо:

1) ознакомиться с перечнем вопросов для подготовки к зачету (а также с контрольными вопросами для проведения текущей аттестации) и при необходимости повторить их с использованием конспекта лекций и / или рекомендованных учебных пособий;

2) повторить решение типовых задач, приведенных в п. IV “Оценочные средств для проведения текущей и промежуточной аттестации” (типовые задачи для проведения текущей аттестации; примерные задания для проведения промежуточной аттестации), а также решение задач, задаваемых преподавателем для самостоятельного выполнения по рекомендованным учебным пособиям;

3) при возникновении каких-либо вопросов, трудностей в уяснении теоретического материала или проблем с решением задач прибегнуть к помощи Вашего преподавателя и / или других студентов Вашей группы.

• Вопросы для подготовки к зачету:

1. Понятие  $n$ -мерного вектора. Линейные операции над  $n$ -мерными векторами.
2. Понятие  $n$ -мерного линейного векторного пространства. Скалярное произведение и длина  $n$ -мерных векторов. Угол между  $n$ -мерными векторами.
3. Понятие евклидова пространства.
4. Разложение вектора по системе векторов.
5. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов.
9. Понятие матрицы. Виды матриц (матрица-строка, матрица-столбец, квадратная, диагональная, единичная, нулевая, верхняя треугольная, нижняя треугольная).
10. Операции над матрицами (умножение матрицы на число, сложение матриц, вычитание матриц,) и их свойства.
11. Операции над матрицами (транспонирование матрицы, умножение матриц, возведение в степень обращение матрицы) и их свойства.
12. Понятие определителя квадратной матрицы. Обозначения.
13. Понятие минора, алгебраического дополнения элемента матрицы.
14. Правило расчета определителя 2-го порядка.
15. Правила расчета определителя 3-го порядка (правило треугольников, правило Саррюса, правило разложения по элементам строки или столбца).
16. Теорема Лапласа (правило расчета определителя любого порядка  $n$ ).
17. Свойства определителей.
18. Понятие невырожденной матрицы.
19. Определение обратной матрицы.
20. Условие существования обратной матрицы.
21. Расчет обратной матрицы по формуле с помощью присоединенной матрицы.
22. Расчет обратной матрицы методом Жордана с помощью элементарных преобразований.
23. Определение ранга матрицы.
24. Свойства ранга матрицы.
25. Расчет ранга матрицы приведением ее к ступенчатому (трапецеидальному) или треугольному виду с помощью элементарных преобразований.
26. Элементарные преобразования матрицы (не изменяющие ее ранг).
27. Теорема о ранге и линейной независимости строк (столбцов) матрицы.
28. Матричный метод решения СЛАУ (при  $m=n$ ).
29. Метод Крамера решения СЛАУ (при  $m=n$ ).
30. Метод Гаусса решения СЛАУ.
31. Теорема о существовании решения СЛАУ.
32. Метод Жордана – Гаусса решения СЛАУ. Понятие базисных, свободных переменных, базисных решений.
33. Понятие системы  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными и ее решения.
34. Совместные и несовместные системы. Определенные и неопределенные

системы.

35. Равносильные системы.
36. Матричная форма записи СЛАУ. Понятие матрицы системы.
37. Методы решения СЛАУ.
38. Система  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными и ее решение с использованием обратной матрицы.
39. Решение системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Крамера.
40. Решение системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Гаусса. Понятие расширенной матрицы. Эквивалентные преобразования расширенной матрицы. Прямой и обратный ход метода Гаусса.
41. Решение системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Жордана - Гаусса.
42. Теоремы о разрешимости системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными (теорема Кронекера – Капелли).
43. Понятие базисных и свободных переменных, общего решения и базисных решений системы линейных уравнений.
44. Система линейных однородных уравнений. Анализ разрешимости системы.

#### ▲ Методические рекомендации по подготовке к экзамену

Экзамен - важный этап в учебном процессе, имеющий целью проверку знаний, выявление умений применять полученные знания к решению практических задач. Как подготовка к экзамену, так и сам экзамен - форма активизации и систематизации полученных знаний, их углубления и закрепления. Подготовка к экзаменам для студентов, особенно заочной формы обучения, всегда осложняется дефицитом времени.

Для подготовки к экзамену необходимо:

- 1) ознакомиться с перечнем вопросов для подготовки к экзамену (а также с контрольными вопросами для проведения текущей аттестации) и при необходимости повторить их с использованием конспекта лекций и / или рекомендованных учебных пособий;
- 2) повторить решение типовых задач, приведенных в п. IV “Оценочные средств для проведения текущей и промежуточной аттестации” (типовые задачи для проведения текущей аттестации; примерные задания для проведения промежуточной аттестации), а также решение задач, задаваемых преподавателем для самостоятельного выполнения по рекомендованным учебным пособиям;
- 3) при возникновении каких-либо вопросов, трудностей в уяснении теоретического материала или проблем с решением задач прибегнуть к помощи Вашего преподавателя и / или других студентов Вашей группы.

#### • Вопросы для подготовки к экзамену:

1. Понятия оператора и линейного оператора. Действия над линейными операторами (сумма двух линейных операторов, произведение линейного оператора на число, произведение линейных операторов).
2. Понятия собственного вектора и собственного значения квадратной матрицы.
3. Характеристическое уравнение матрицы.
4. Линейная модель обмена (модель международной торговли).
5. Понятие квадратичной формы. Каноническая квадратичная форма.
6. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
7. Понятие аналитической геометрии. Системы координат на плоскости: система координат, прямоугольная система координат, координаты точки, метод координат, полярная система координат.
8. Приложения метода координат на плоскости: расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении.
9. Способы задания прямой линии на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом, общее уравнение прямой.

10. Способы задания прямой линии на плоскости: уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две точки.
11. Способы задания прямой линии на плоскости: уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
12. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.
13. Основные понятия аналитической геометрии в пространстве: уравнение поверхности в прямоугольной системе координат, текущие координаты точки поверхности.
14. Основные понятия аналитической геометрии в пространстве: уравнения линии в пространстве, векторное уравнение линии в пространстве, параметрическое уравнение линии в пространстве.
15. Способы задания прямой в пространстве: классические уравнения прямой; уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки; общие уравнения прямой.
16. Определение линейного программирования (ЛП).
17. Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП).
18. Понятия целевой функции, системы ограничений, допустимого решения, оптимального решения ЗЛП.
19. Постановка задачи оптимального планирования производства продукции.
20. Постановка задачи о составлении рациона (задачи о диете).
21. Постановка транспортной задачи как специальной ЗЛП.
22. Стандартная форма ЗЛП с двумя переменными.
23. Теоремы о множестве решений линейного неравенства, совместной системы линейных неравенств.
24. Понятие области допустимых решений ЗЛП при  $n=2$ .
25. Правила построения многоугольника решений (области допустимых решений) ЗЛП (при  $n=2$ ). Виды многоугольника решений.
26. Геометрическая интерпретация замкнутого многоугольника решений, неограниченной многоугольной области решений, пустого множества решений (при  $n=2$ ).
27. Понятие линии уровня и вектора нормали целевой функции (при  $n=2$ ). Правила их построения.
28. Нахождение оптимального решения ЗЛП графическим методом с помощью вектора нормали и линии уровня целевой функции (при  $n=2$ ).
29. Геометрическая интерпретация единственного оптимального решения, множества оптимальных решений, отсутствия оптимальных решений при графическом методе решения ЗЛП.
30. Алгоритм графического метода решения задачи линейного программирования.
31. Каноническая форма записи ЗЛП. Правила перехода к канонической форме ЗЛП.
32. Понятие выпуклого множества. Теорема о пересечении выпуклых множеств.
33. Понятие выпуклого многогранника. Теорема о представлении точек выпуклого многогранника.
34. Теорема о выпуклости множества допустимых решений ЗЛП.
35. Основная теорема линейного программирования (теорема о соотношении оптимального решения ЗЛП и угловых точек множества допустимых решений ЗЛП).
36. Понятие допустимого базисного решения (ДБР). Теорема о соответствии ДБР и угловых точек многогранника решений.
37. Геометрический смысл симплекс-метода решения ЗЛП. Суть алгоритма симплекс-метода решения ЗЛП.
38. Построение начального допустимого базисного решения. Определение состава базисных и свободных переменных.
39. Понятие пары двойственных задач. Виды пар двойственных задач.
40. Правила построения двойственных задач линейного программирования.
41. Математические модели симметричных и асимметричных двойственных задач.
42. Экономическая интерпретация переменных двойственной задачи (при исходной задаче оптимального планирования производства).

43. Экономическая интерпретация двойственной задачи (при исходной задаче оптимального планирования производства).
44. Первая теорема двойственности и ее экономический смысл.
45. Вторая теорема двойственности и ее экономический смысл.
46. Свойства двойственных оценок и их экономический смысл.

**Типовые задачи для текущей аттестации, 1 семестр:**Контрольные задания по темам 1, 2, 3:

- 1) Даны векторы в пространстве  $R^3$ :  $a_1 = (0; 1; 2)$ ,  $a_2 = (1; 0; 1)$ ,
  - а) вычислить скалярное произведение векторов  $\alpha_1, \alpha_2$ ,
  - б) вычислить косинус угла между векторами  $\alpha_1, \alpha_2$ .
- 2) Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Вычислить
  - а) матрицу  $A^3$ ,
  - б) матрицу  $A^T - 4A + 2E$ ,
  - в) матрицу  $X$  такую, что  $AX = E$ .

- 3) Вычислить матричное выражение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T$$

- 4) Дана матрица  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Найти определитель матрицы  $B$  двумя способами:

- а) по правилу треугольников, б) с помощью преобразования к треугольному виду.

- 5) Найти определитель матрицы  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 6) Решить уравнение: 
$$\begin{vmatrix} x+4 & 1 & 1 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & 1-x & x \end{vmatrix} = 0$$

Контрольные задания по теме 4:

- 1) Решить систему линейных уравнений двумя способами:
  - а) матричным методом с помощью обратной матрицы,
  - б) методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

2) Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

**Типовые задачи, 2 семестр:**

Контрольные задания по темам 8, 9:

- 1) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы А.  
Выполнить проверку.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2) Представить матрицу квадратичной формы. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:

$$f(X) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_1x_3 + 5x_3^2.$$

Контрольные задания по темам 10, 11, 12, 13:

- 1) Постройте математическую модель задачи с описанием переменных, целевой функции и ограничений.

а) задача оптимального планирования производства продукции:

Для изготовления двух видов продукции используется 3 типа сырья, запасы которого и нормы расхода на единицу продукции заданы в таблице.

| Вид продукции     | Тип сырья |    |     | Прибыль (ден. ед.) |
|-------------------|-----------|----|-----|--------------------|
|                   | I         | II | III |                    |
| Продукция I       | 8         | 2  | 4   | 43                 |
| Продукция II      | 2         | 4  | 7   | 75                 |
| Запасы сырья, ед. | 20        | 95 | 83  |                    |

Составить план производства продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

б) задача о составлении рациона (задачи о диете):

В суточный рацион птиц включают два продукта питания Продукт<sub>1</sub> и Продукт<sub>2</sub>, причем в дневном рационе Продукта<sub>1</sub> должно быть не более 200 ед. Стоимость одной единицы Продукта<sub>1</sub> составляет 20 ден.ед., Продукта<sub>2</sub> – 40 ден.ед. Содержание питательных веществ А, В в одной единице каждого продукта, минимальные суточные нормы потребления указаны в таблице.

| Питательное вещество | Минимальная норма потребления, ед/день | Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта |                      |
|----------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------|
|                      |                                        | Продукт <sub>1</sub>                            | Продукт <sub>2</sub> |
| А                    | 240                                    | 0,4                                             | 0,4                  |
| В                    | 320                                    | 0,8                                             | 0,4                  |

Определить оптимальный рацион питания (количество каждого продукта питания), стоимость которого будет наименьшей при соблюдении суточных норм потребления питательных веществ.

2) Решите ЗЛП графическим методом: построение области допустимых решений (ОДР), вектора нормали и линии уровня целевой функции; нахождение точек минимума и максимума целевой функции.

$$f(x) = -5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_i \geq 0, i=1,2 \end{cases}$$

3) Дана задача линейного программирования (ЗЛП).

$$Z = 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 70x_2 \leq 570, \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 420, \\ 40x_1 + 10x_2 \leq 600, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- I. Постройте двойственную задачу для данной ЗЛП. Опишите экономический смысл двойственной задачи.
- II. Оптимальное решение исходной ЗЛП:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 8$ . Выполните анализ оптимального решения с помощью теории двойственности.
- III. Проиллюстрируйте 1 теорему двойственности.

**Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации**

*Планируемый результат по УК-1* способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач:

УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие.

*Планируемые результаты по ОПК-4* Способен понимать принципы работы информационных технологий; использовать информацию, методы и программные средства ее сбора, обработки и анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений:

ОПК-4.3. Применяет стандартные математические (в том числе, эконометрические) модели и методы для описания статистических зависимостей, выявления тенденций изменения экономических показателей, обнаружения в больших массивах данных ранее неизвестных закономерностей, необходимых для расчета прогнозных значений и принятия управленческих решений

*1 семестр. Типовое контрольное задание* на зачёте по дисциплине «Линейная алгебра» состоит из двух частей:

*1 часть* – два теоретических вопроса по темам дисциплины.

*2 часть* – практическое задание с обоснованием применяемого метода решения и пояснением основных понятий.

***Примерные теоретические вопросы:***

1. Понятие матрицы. Виды матриц (матрица-строка, матрица-столбец, квадратная, диагональная, единичная, нулевая, верхняя треугольная, нижняя треугольная).
2. Операции над матрицами (умножение матрицы на число, сложение матриц, вычитание матриц,) и их свойства.
3. Операции над матрицами (транспонирование матрицы, умножение матриц, возведение в степень обращение матрицы) и их свойства.
4. Понятие определителя квадратной матрицы. Обозначения.

5. Понятие минора, алгебраического дополнения элемента матрицы.
6. Правило расчета определителя 2-го порядка.
7. Матричный метод решения СЛАУ (при  $m=n$ ).
8. Метод Крамера решения СЛАУ (при  $m=n$ ).
9. Метод Гаусса решения СЛАУ.
10. Теорема о существовании решения СЛАУ.
11. Метод Жордана – Гаусса решения СЛАУ. Понятие базисных, свободных переменных, базисных решений.

### ***Примерные задания:***

#### *Задание 1.*

Даны матрицы  $A_{m \times n}$ ,  $B_{m \times n}$ ,  $C_{m \times n}$  выручки фирмы за январь, февраль, март соответственно, где  $m$  – число товарных позиций,  $n$  – количество магазинов. Найти суммарную выручку за 1 квартал и проанализировать динамику показателя за три месяца.

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, C_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

#### *Задание 2.*

Найти определитель матрицы  $A$ , минор и алгебраическое дополнение к элементам матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 12 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 14 & 10 \end{pmatrix}, M_{22}, A_{32}.$$

#### *Задание 3.*

Построить математическую модель текстовой экономической задачи в виде системы линейных алгебраических уравнений. Дать описание переменных и уравнений. Исследовать на разрешимость и решить систему

уравнений методом Гаусса. Представить толкование результатов в контексте исходных условий задачи:

Предприятие располагает ресурсами двух видов в объемах 120 ед. и 80 ед. соответственно. Эти ресурсы используются для выпуска продукции А и В, причем расход на изготовление единицы продукции вида А составляет 2 ед. ресурса первого вида и 2 ед. ресурса второго вида, продукции вида В- 3 ед. ресурса первого вида и 1 ед. ресурса второго вида. Найти план выпуска продукции А и В, при котором запасы ресурсов расходуются полностью без остатков, если такой план существует.

***Шкала оценки степени сформированности компетенций обучающихся на промежуточной аттестации в рамках рейтинговой системы (по очной форме обучения)***

| Контрольное задание на зачете | Индикаторы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Количество рейтинговых баллов |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| Часть 1                       | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие.                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 20                            |
| Часть 2                       | ОПК-4.3 Применяет стандартные математические (в том числе, эконометрические) модели и методы для описания статистических зависимостей, выявления тенденций изменения экономических показателей, обнаружения в больших массивах данных ранее неизвестных закономерностей, необходимых для расчета прогнозных значений и принятия управленческих решений | 20                            |
| Итого                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 40                            |

Шкала оценивания соотнесена с рейтинговыми баллами.

***Шкала оценки степени сформированности компетенций обучающихся на промежуточной аттестации по 5-ти балльной системе (по очно-заочной форме обучения)***

| Контрольное задание на зачете | Оценка «не зачтено»                                                                                                                                                                                                  | Оценка «зачтено»                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Часть 1                       | Даны полные и правильные ответы на теоретические вопросы, практическое задание не выполнено;                                                                                                                         | Даны полные и правильные ответы на теоретические вопросы, практическое задание выполнено правильно;                                                                                                                                                                                                                         |
| Часть 2                       | при ответе на теоретические вопросы допущены неточности, практическое задание не выполнено; при ответе на теоретические вопросы допущены существенные неточности, практическое задание выполнено не в полном объеме. | при ответе на теоретические вопросы допущены неточности, практическое задание выполнено правильно; даны полные и правильные ответы на теоретические вопросы, практическое задание выполнено не в полном объеме; при ответе на теоретические вопросы допущены неточности, практическое задание выполнено не в полном объеме. |

Форма проведения промежуточной аттестации: устная и письменная.

**2 семестр. Типовое контрольное задание** на экзамене по дисциплине «Линейная алгебра» состоит из двух частей:

*1 часть* – два теоретических вопроса по темам дисциплины.

*2 часть* – практическое задание с обоснованием применяемого метода решения и пояснением основных понятий.

**Примерные теоретические вопросы:**

1. Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП).
2. Понятия целевой функции, системы ограничений, допустимого решения, оптимального решения ЗЛП.
3. Постановка задачи оптимального планирования производства продукции.
4. Постановка задачи о составлении рациона (задачи о диете).
5. Постановка транспортной задачи как специальной ЗЛП.

6. Понятие пары двойственных задач. Виды пар двойственных задач.
7. Правила построения двойственных задач линейного программирования.
8. Математические модели симметричных и асимметричных двойственных задач.
9. Экономическая интерпретация переменных двойственной задачи (при исходной задаче оптимального планирования производства).
10. Экономическая интерпретация двойственной задачи (при исходной задаче оптимального планирования производства).

### ***Примерные задания:***

#### *Задание 1.*

Построить математическую модель задачи линейного программирования, решить ее графическим методом, представить описание оптимального решения.

На установку и закупку производственного оборудования выделено 96 м<sup>2</sup> и 72 ден. ед. Фирма может приобрести машины типа А стоимостью 12 ден. ед., занимающие площадь в 12 м<sup>2</sup> и выпускающие 14 ед. продукции за смену, и машины типа В стоимостью 6 ден. ед., занимающие площадь в 36 м<sup>2</sup> и обеспечивающие выпуск 20 ед. продукции за смену. При этом машин типа А можно заказать не более 10 штук.

Определить объемы закупки машин каждого типа, обеспечивающие максимальный выпуск продукции на новом оборудовании.

Проверить полученный оптимальный план закупок, решив задачу с помощью инструмента *Поиск решения* в MS Excel.

#### *Задание 2.*

Дана математическая модель задачи оптимального планирования производства **n** видов продукции при **m** видах ресурсов с целью получения максимальной прибыли.



были реализованы; заявки всех потребителей удовлетворены; суммарные затраты на перевозку были минимальными.

| Запасы поставщиков | Заявки потребителей |     |    |     |
|--------------------|---------------------|-----|----|-----|
|                    | 30                  | 110 | 40 | 120 |
| 120                | 1                   | 2   | 5  | 3   |
| 80                 | 1                   | 6   | 5  | 2   |
| 100                | 6                   | 3   | 7  | 4   |

***Шкала оценки степени сформированности компетенций обучающихся на промежуточной аттестации в рамках рейтинговой системы (по очной форме обучения)***

| Контрольное задание на экзамене | Индикаторы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Количество рейтинговых баллов |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| Часть 1                         | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие.                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 20                            |
| Часть 2                         | ОПК-4.3 Применяет стандартные математические (в том числе, эконометрические) модели и методы для описания статистических зависимостей, выявления тенденций изменения экономических показателей, обнаружения в больших массивах данных ранее неизвестных закономерностей, необходимых для расчета прогнозных значений и принятия управленческих решений | 20                            |
| Итого                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 40                            |

Шкала оценивания соотнесена с рейтинговыми баллами.

***Шкала оценки степени сформированности компетенций обучающихся на промежуточной аттестации по 5-ти балльной системе (по очно-заочной форме обучения)***

| Контрольное экзаменационное задание | Оценка «неудовлетворительно» | Оценка «удовлетворительно» | Оценка «хорошо» | Оценка «отлично» |
|-------------------------------------|------------------------------|----------------------------|-----------------|------------------|
|-------------------------------------|------------------------------|----------------------------|-----------------|------------------|

|         |                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                     |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Часть 1 | При ответе на теоретические вопросы допущены неточности, практические задания не выполнены;                              | При ответе на теоретические вопросы допущены неточности, практические задания выполнены не в полном объеме; даны полные и правильные ответы на теоретические вопросы, практические задания фактически не выполнены. | При ответе на теоретические вопросы допущены неточности, практические задания выполнены правильно; даны полные и правильные ответы на теоретические вопросы, практические задания выполнены с неточностями. | Даны полные и правильные ответы на теоретические вопросы, практические задания выполнены правильно. |
| Часть 2 | при ответе на теоретические вопросы допущены существенные неточности, практические задания выполнены не в полном объеме. |                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                     |

Форма проведения промежуточной аттестации: устная и письменная.



$Z$  – это ...

$x_2$  – это ...

$a_{21}$  – это ...

$a_{1n}x_n$  – это ...

$b_m$  – это ...

$c_n x_n$  – это ... и т.п.,

например,

$a_{23}$  – это количество ресурса 2-го вида, расходуемого на производство одной единицы продукции 3-го вида,

$a_{23}x_3$  – это количество ресурса 2-го вида, расходуемого на производство  $x_3$  единиц продукции 3-го вида.

### Задание 3.

Транспортная задача. Построить экономико-математическую модель задачи. Имеются 3 поставщика и 4 потребителя. Запасы поставщиков и заявки потребителей, затраты на перевозку единицы груза для каждой пары «поставщик – потребитель» заданы в таблице. Найти методом минимального тарифа начальный допустимый план перевозок для каждой пары «поставщик – потребитель» так, чтобы запасы всех поставщиков были реализованы; заявки всех потребителей удовлетворены; рассчитать суммарные затраты на перевозки.

| Запасы поставщиков | Заявки потребителей |     |    |     |
|--------------------|---------------------|-----|----|-----|
|                    | 30                  | 110 | 40 | 120 |
| 120                | 1                   | 2   | 5  | 3   |
| 80                 | 1                   | 6   | 5  | 2   |
| 100                | 6                   | 3   | 7  | 4   |