Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:
Руководитель ООП
Н.А. Семыкина
____
«4» 09 20__ г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Управление нелинейными системами

Специальность
10.05.01 Компьютерная безопасность

Специализация
Математические методы защиты информации

Для студентов 5 курса очной формы обучения

Составитель: ____________________ д.ф.м.н., профессор Е.А.Андреева

Тверь, 2023

1. Аннотация

Управление нелинейными системами.

2. Цели и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины «Управление нелинейными системами» является изучение методов управления системами, имеющими обширные приложения в информационной и компьютерной безопасности, в экономике, экологии, технике, компьютерных науках и других сферах. Рассматриваемые модели формализуются как конечномерные задачи нелинейного программирования, дискретные задачи оптимального управления и как непрерывные задачи оптимального управления, описываемые нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений, системами дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, системами интегро-дифференциальных уравнений и др. Изучаются методы построения и анализа оптимальных решений, численные методы и алгоритмы.

3. Место дисциплины в структуре ООП

Данная дисциплина относится к базовой части, изучается во втором семестре на 5 курсе математического факультета и использует сведения из таких общих фундаментальных курсов, как анализ, линейная алгебра и аналитическая геометрия, дискретная математика, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, функциональный анализ, теория систем, численные методы, теория вероятности, исследование операций.

4.Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 144 часа, 4 зачетные единицы. Лекции 30 часов, практические занятия 30 часов, самостоятельная работа 30 часа, контроль 54 часа.

5.Перечень планируемых результатов по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (или модулю)**
ОПК-3 – способностью понимать значение информации в	**Владеть:** навыками обработки и представления экспериментальных данных с помощью современных информационных технологий.

развитии современного общества, применять достижения информационных технологий для поиска и обработки информации по профилю деятельности в глобальных компьютерных сетях, библиотечных фондах и в иных источниках информации	**Уметь:** собирать, обрабатывать, анализировать и систематизировать научно-техническую информацию по тематике исследования. **Знать:** основные принципы и методы обработки информации в глобальных компьютерных сетях, библиотечных фондах и в иных источниках.
ПСК-2.3. способностью строить математические модели для оценки безопасности компьютерных систем и анализировать компоненты системы безопасности с использованием современных математических методов	**Владеть:** навыками использования моделей управляемых систем для решения профессиональных задач **Уметь:** разрабатывать алгоритмы построения моделей для различных приложений. **Знать:** основные принципы и методы построения математических моделей, описывающих динамические управляемые системы.
ПСК-2.4. способностью разрабатывать, анализировать и обосновывать адекватность математических моделей процессов, возникающих при работе программно-аппаратных средств защиты информации	**Владеть:** методами нелинейного программирования, математической теории оптимального управления, включая принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования, методы анализа устойчивости и синтеза управляемых систем и обработки информации и пр. **Уметь:** применять методы нелинейного программирования, дискретной математики, теории устойчивости и оптимального управления к исследованию математических моделей компьютерной и информационной безопасности. **Знать:** методы анализа сложных систем, теории устойчивости, теории оптимального управления, принцип максимума Понтрягина и принцип динамического программирования Р.Бэллмана.

ПСК-2.5. способностью проводить сравнительный анализ и осуществлять обоснованный выбор программно-аппаратных средств защиты информации с учетом современных и перспективных математических методов защиты информации	**Владеть:** навыками анализа средств защиты информации и навыками применения математических методов защиты информации. **Уметь:** разрабатывать алгоритмы решения профессиональных задач на основе математических методов защиты информации. **Знать:** классические и современные математические методы исследования защиты информации.

6.Форма промежуточной аттестации экзамен.

7. Язык преподавания русский.

II. Содержание дисциплины (или модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.

1. Для студентов очной формы обучения

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)		Самостоятельная работа (час.)	Контроль
		Лекции	Практические (лабораторные) занятия		
1. Основные сведения о методах оптимизации, существование локального и глобального решения. Необходимые условия оптимальности.	6	2	2	2	3
2. Задачи нелинейного программирования. Метод множителей Лагранжа, методы штрафных	6	2	2	2	3

функции, метод Ньютона, метод сопряженных направлений и др.					
3. Необходимые и достаточные условия оптимальности в задачах нелинейного программирования.	6	2	2	2	3
4. Дискретная задача оптимального управления и методы ее решения.	6	2	2	2	3
5. Методы внутренних и внешних штрафных функций. Примеры решения задач нелинейного программирования.	6	2	2	2	3
6. Исследование решения в зависимости от ограничений и параметров задачи. Метод градиентного спуска «БАД», проекции градиента.	6	2	2	2	4
7. Постановка задачи оптимального управления динамической системой. Линейные управляемые модели.	6	2	2	2	3
8. Методы аппроксимации задач оптимального управления дискретной задачей. Точность аппроксимации.	6	2	2	2	4
9. Принцип максимума Л.С.Понтрягина. Краевая задача.	6	2	2	2	4
10. Методы построения оптимального решения (метод проекции градиента, методы внешних и внутренних штрафных функций, итерационные методы).	6	2	2	2	4

11. Примеры применения ПМП для построения оптимального решения в моделях оптимизации WEB-сайтов. Модель «Хищник-Жертва». Модель информационного противоборства. Применение ПМП для построения оптимального решения осцилляторной нейронной сети и оптимизации ее параметров.	6	2	2	2	4
12. Применение методов оптимального управления для исследования управляемых динамических систем. Задачи с нефиксированным временем процесса, задачи быстродействия.	6	2	2	2	4
13. Метод (Р.Беллмана) динамического программирования для непрерывной и дискретной задач ОУ. Задача синтеза оптимального управления. Задача с нефиксированным временем процесса.	6	2	2	2	4
14. Численные методы и алгоритмы построения оптимального решения.	6	2	2	2	4
15. Многокритериальные задачи оптимального управления. Множество Парето.	6	2	2	2	4
Итого:	144	30	30	30	54

III. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (или модулю).

Список литературы

а) Основная литература

Трухин, М. П. Моделирование сигналов и систем. Дифференциальные, дискретные и цифровые модели динамических систем : учебное пособие / М. П. Трухин ; под научной редакцией С. В. Поршнева. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 228 с. — ISBN 978-5-8114-3792-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/206774

Трухин, М. П. Моделирование сигналов и систем. Сетевые модели : учебное пособие / М. П. Трухин ; под редакцией В. Э. Иванова. — Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2018. — 204 с. — ISBN 978-5-7996-2503-0. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/107064.html

б) Дополнительная литература:

Глухов Д.О. Моделирование систем управления : практикум / Глухов Д.О., Петухов И.В.. — Йошкар-Ола : Поволжский государственный технологический университет, 2015. — 84 c. — ISBN 978-5-8158-1546-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/75437.html

Губарь Ю.В. Введение в математическое моделирование : учебное пособие / Губарь Ю.В.. — Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2021. — 178 c. — ISBN 978-5-4497-0865-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/101993.html

Миронова, Л.И. Моделирование динамических процессов в существенно нелинейных системах : монография / Миронова Л.И., Кондратенко Л.А. — Москва : Русайнс, 2021. — 225 с. — ISBN 978-5-4365-6679-5. — URL: https://book.ru/book/939949 .

Моделирование систем и процессов [Электронный ресурс]: учебник для академического бакалавриата / под ред. В.Н.Волковой, В.Н.Козлова; ЭБС Юрайт. — М.: Юрайт, 2017. — 450 с. — (Бакалавр. Академический курс). – Режим доступа: https://www.biblioonline.ru/viewer/E7D370B9-3C64-4A0F-AF1B-F6BD0EEEBCD0#page/1 .

Глоссарий

- *Детерминированная модель*
- *Стохастическая модель*
- *Параметры модели*

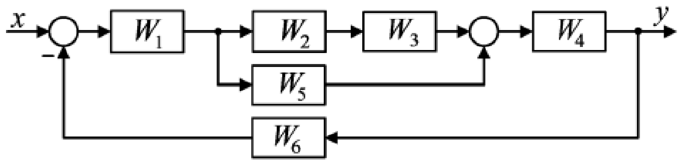
- *Статистические методы*
- *Устойчивость решений*
- Весовые коэффициенты
- Детерминированная система
- Дискретная система
- Допустимое управление
- Критерий качества
- Математическая модель
- Многокритериальная задача
- Множество Парето
- Нейронная сеть
- Обучение нейронной сети
- Оптимизация нейронной сети
- Оптимальное управление
- Особое оптимальное управление
- Порядок аппроксимации
- Сложная система
- Стохастическая система
- Классификация нейронных сетей
- Точка переключения управления
- Условие Келли
- Устойчивость оптимального решения
- Устойчивость по линейному приближению
- Функция активации
- Функция штрафа
- Целевой функционал
- Градиентные методы методы
- Эволюционная система
- Экстремум, минимум, максимум функции
- Экстремальная задача
- Регулярное решение
- Нерегулярное решение
- Регулярная функция Лагранжа
- Дискретная задача оптимального управления (ДЗОУ)
- Локально оптимальный процесс в ДЗОУ
- Необходимые условия оптимальности для ДЗОУ
- Задача оптимального управления (ЗОУ)
- Функция состояния,
- Оптимальный процесс
- Принцип максимума для ЗОУ
- Краевая задача принципа максимума
- Задача оптимального управления с нефиксированным временем
- Условия трансверсальности для ЗОУ

- Задача быстродействия
- Метод штрафных функций
- Принцип оптимальности Беллмана для непрерывной ЗОУ
- Управление-синтез
- Усеченная задача
- Функция Беллмана
- Теорема о достаточном условии оптимальности синтеза
- Алгоритм построения оптимального процесса на основе оптимального синтеза
- Достаточные условия оптимальности в форме Гамильтона - Якоби Двойственная задача для ЗОУ
- Неравенство двойственности для ЗОУ
- Теорема Гамильтона – Якоби
- Дискретная аппроксимация непрерывной ЗОУ
- Метод градиентного спуска для задачи нелинейного программирования
- Проекция точки на множество
- Метод проекции градиента для задачи нелинейного программирования
- Метод градиентного спуска (проекции градиента) с дроблением шага спуска
- Метод последовательных приближений решения ДЗОУ
- Динамическое программирование
- Усеченная задача
- Функция Беллмана
- Теорема Принцип перехода
- Теорема Принцип оптимальности
- Метод динамического программирования
- Схема Беллмана
- Управление-синтез
- Проблема синтеза

IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций ОПК – 3, ПСК – 2.3, 2.4, 2.5..

Этап формирования компетенции, в котором участвует	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания

дисципли **на**		
Владеть	1. Используя первый метод Ляпунова исследовать систему на устойчивость. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(1-2x-y), \\ \dot{y} = 2x - x^2 + y. \end{cases}$ 2.Задана структурная схема. Требуется получить эквивалентную передаточную функцию W и рассчитать ее, подставив заданные значения параметров. 	Основными понятиями ТОУ, теории устойчивости, численными методами.
Уметь	1. Выписать краевую задачу принципа максимума $J(u) = 6\int_0^4 (u(t)x_2(t))dt + 3x_1(4) - x_2(4) \to \inf,$ $\dot{x}_1(t) = x_2(t)u(t),$ $\dot{x}_2(t) = 2u(t) + x_1(t),$ $x_i(0) = 0, \quad i = 1,2,$ $\lvert u \rvert \le 1, \quad t \in [0,4].$ 2. Дана задача оптимального управления. Определить существование особого оптимального управления в задаче. $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^3 (x_2(t))dt + \frac{1}{2}x_1(3) - 3x_2(3) \to \inf,$ $\dot{x}_1(t) = u^2(t),$ $\dot{x}_2(t) = u(t),$ $x_i(0) = 0, \quad i = 1,2,$ $-1 \le u(t) \le 2, \quad t \in [0,3].$	Применять методы ОУ к решению задач оптимального управления.
Знать	1.Используя метод штрафных функций построить минимизируемый функционал для задачи. $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u_1 + u_2)dt - 2x_2(T) - x_1(T) \to \inf$ $\dot{x}_1 = -2x_1 + u_1; \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u_2;$ $x_1(0) = x_2(0) = 0;$	Методы и алгоритмы построения оптимизации решений, анализ решений, точность

	$x_1(t) \geq 0, \quad 0 \leq x_2(t) \leq 7,$ $u_i \in [0,1], i = 1,2..$ 2. Построить дискретную аппроксимацию непрерывной задачи. $J(u) = \int_0^3 (u^2(t) + x_1(t) + x_2(t))dt \to \inf,$ $\dot{x}_1(t) = -x_1(t-h) \cdot x_2(t-h) + u(t),$ $\dot{x}_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(t-h) + u^2(t),$ $x_i(t) = -2e^t, -h \leq t \leq 0, \quad i = 1,2,$ $\lvert u \rvert \leq 1, \quad t \in [0,3].$	аппроксимации. Влияние параметров задачи на оптимальное решение.

V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Список литературы

а) Основная литература

Трухин, М. П. Моделирование сигналов и систем. Дифференциальные, дискретные и цифровые модели динамических систем : учебное пособие / М. П. Трухин ; под научной редакцией С. В. Поршнева. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 228 с. — ISBN 978-5-8114-3792-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/206774

Трухин, М. П. Моделирование сигналов и систем. Сетевые модели : учебное пособие / М. П. Трухин ; под редакцией В. Э. Иванова. — Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2018. — 204 с. — ISBN 978-5-7996-2503-0. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/107064.html

б) Дополнительная литература:

Глухов Д.О. Моделирование систем управления : практикум / Глухов Д.О., Петухов И.В.. — Йошкар-Ола : Поволжский государственный технологический университет, 2015. — 84 c. — ISBN 978-5-8158-1546-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/75437.html

Губарь Ю.В. Введение в математическое моделирование : учебное пособие / Губарь Ю.В.. — Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2021. — 178 c. — ISBN 978-5-4497-0865-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/101993.html

Миронова, Л.И. Моделирование динамических процессов в существенно нелинейных системах : монография / Миронова Л.И., Кондратенко Л.А. — Москва : Русайнс, 2021. — 225 с. — ISBN 978-5-4365-6679-5. — URL: https://book.ru/book/939949

Моделирование систем и процессов [Электронный ресурс]: учебник для академического бакалавриата / под ред. В.Н.Волковой, В.Н.Козлова; ЭБС Юрайт. — М.: Юрайт, 2017. — 450 с. — (Бакалавр. Академический курс). – Режим доступа: https://www.biblioonline.ru/viewer/E7D370B9-3C64-4A0F-AF1B-F6BD0EEEBCD0#page/1 .

VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети “Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. ЭБС Лань https://e.lanbook.com/ Договор № 4-е/23 от 02.08.2023 г.
2. ЭБС Znanium.com https://znanium.com/ Договор № 1106 эбс от 02.08.2023 г.
3. ЭБС Университетская библиотека online https://biblioclub.ru Договор № 02-06/2023 от 02.08.2023 г.
4. ЭБС ЮРАЙТ https://urait.ru/ Договор № 5-е/23 от 02.08.2023 г.
5. ЭБС IPR SMART https://www.iprbookshop.ru/ Договор № 3-е/23К от 02.08.2023 г.

VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

1.Методические указания по подготовке к практическим занятиям

Практические занятия по дисциплине «Модели управляемых систем» служат для получения практических навыков по применению теоретических знаний, полученных студентами на лекциях, для решения конкретных задач.

Решения задач фиксируются в тетрадях для практических работ и оцениваются согласно требованиям к рейтинговому контролю.

Тема 8 и 16. Линейные математические модели в теории автоматического регулирования. Математическое описание модели, условия устойчивости решении. Понятие управляемости системы.

Типовое задание.

№ 1. Дан объект, движение которого описывается дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + u,$$

где x – отклонение от положения равновесия, $\dot{x}$ – скорость объекта, -kx – упругая сила, к – коэффициент, к>=0, b$\dot{x}$ – сила трения, b>= 0, u – внешняя сила.

Обозначив через $x_1 = x$ отклонение от положения равновесия, $x_2 = \dot{x}$ - скорость, мы сможем записать этот закон движения в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - bx_2 + u. \end{cases}$$

В начальный момент времени известно отклонение от положения равновесия $x_1(0) = a_1$ и скорость $x_2(0)=b_1$.

Требуется исследовать устойчивость решений системы в зависимости от параметров задачи при постоянном управлении $u(t)$, определить время T перевода системы в заданное конечное состояние $x_1(T)=0$, $x_2(T)=0$.

№ 2. Исследовать влияние времени процесса и параметров задачи на структуру управления.

Будем решать задачу о скорейшем попадании объекта из заданной точки в начало координат. Задача имеет следующий вид:

$$T \to \inf$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - bx_2 + u \end{cases}$$

где $|u| \le 1$,

$$x_1(0) = a_1,\ x_2(0)=b_1\ \ x_1(T)=0,\ \ x_2(T)=0.$$

Для решения задачи быстродействия применим принцип максимума.

Запишем функцию Понтрягина:

$$H(p, x, u) = p_1(t)\, x_2 + p_2(t)\,(-kx_1 - b\, x_2 + u).$$

Сопряженная система имеет вид

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = kp_2,$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 + bp_2 .$$

Оптимальное управление определяется из условия максимума функции Понтрягина: $\bar{u} = \arg\max\limits_{|u|\le 1} H(\mathbf{p}, x, u).$

Таким образом, $\bar{u} = \begin{cases} 1, & p_2(t) > 0; \\ -1, & p_2(t) < 0; \\ [-1;1], & p_2(t) = 0. \end{cases}$

Запишем краевую задачу принципа максимума:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - bx_2 + u \end{cases},$$

$$x_1(0) = a_1,\ x_2(0)=b_1,\ x_1(T)=0,\ x_2(T)=0,$$

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = kp_2,$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 + bp_2 ,$$

где оптимальное управление определяется из системы условий

$$\bar{u} = \begin{cases} 1, & p_2(t) > 0; \\ -1, & p_2(t) < 0; \\ [-1;1], & p_2(t) = 0. \end{cases}$$

Тема 10: Принцип максимума для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями. Учет нефиксированного времени процесса

<u>Типовое задание.</u>

№ 1. Построить краевую задачу принципа максимума для следующей задачи оптимального управления

$$
\begin{aligned}
&J(u) = T \to \inf, \\
&\dot{x}_1 = x_2, \\
&\dot{x}_2 = -\alpha_i x_2 - \beta_i x_1 + u(t), \\
&x_i(0) = \xi_i, \;\; x_i(T) = 0, \;\; i = 1,2, \\
&|\, u(t) | \le 1, \;\; t \in [0, T], \\
&i = \begin{cases} 1, \;\; S(t, x_1, x_2) < 0, \\ 2, \;\; S(t, x_1, x_2) \ge 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

При анализе решения требуется исследовать количество переключений оптимального управления, построить краевую задачу принципа максимума, функцию Ляпунова, изобразить траекторию на фазовой плоскости, полагая $S(t,x) = x_i - M_i$, $i = 1,2$ где M_i - заданные значения отклонения или скорости.

Тема 11. Приближенные методы построения решения в задачах с нефиксированным временем процесса. Точность методов и их зависимость от параметров.

Типовое задание.

№ 1. Построить численное решение следующей задачи оптимального управления и проанализировать зависимость решения от параметров задачи.

$$
\begin{aligned}
&J(u) = T \to \inf, \\
&\dot{x} = A^\ell x + b^\ell u, \\
&x(0) = a, \;\; x(T) = 0, \;\; |\, u^i \,| \le 1, \;\; i = 1,2, \\
&\ell = \begin{cases} 1, \;\; S(t, x) < 0, \\ 2, \;\; S(t, x) \ge 0, \end{cases}
\end{aligned}
$$

где B^ℓ, A^ℓ, $\ell = 1,2$,- матрицы размерности 2×2, a- двумерный вектор, $S(t,x)$- заданная поверхность переключения. Требуется исследовать оптимальное решение задачи в зависимости от собственных векторов матриц A^ℓ, $\ell = 1,2$, выбирая в качестве поверхности переключения следующие случаи: а) $x_1 + M_1 = 0$, б) $x_2 + M_2 = 0$, в) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + M = 0$.

Тема 17 и 18. Математические модели в экономике (непрерывная и дискретная задачи).

Типовое задание.

№ 1. Построить краевую задачу принципа максимума для модели об оптимальной политики в области рекламной деятельности. Требуется выработать оптимальную политику в области рекламной деятельности, которая стимулирует объем продаж данного продукта за некоторый период времени при следующих условиях: скорость изменения объема продаж уменьшается пропорционально объему продаж и увеличивается пропорционально уровню рекламной деятельности в той части рынка, которая этим продуктом не насыщена. Задача имеет вид

$$\int_{t_0}^{T} x(t)dt \to max \ ,$$

$$\dot{x}(t) = -ax + bu(t)\left[1 - \frac{x(t)}{M}\right],$$

$$x(t_0) = S_0 \ ,$$

$$0 \le u(t) \le A,$$

где $x(t)$ - объем продаж в единицу времени; $u(t)$ - уровень рекламной деятельности; М – емкость рынка; a, t_0, T, b, S_0, A - заданные положительные параметры; t_0 и T - начальный и конечный моменты времени соответственно; a - показатель скорости продаж, b - эффективность рекламной деятельности; S_0 - начальный объем продаж; А – максимальный уровень рекламной деятельности.

Тема . Математические модели нейронных сетей. Обучение нейронных сетей. Нейрокомпьютеры.

В данном разделе вводятся основные понятия искусственной нейронной сети. Дается анализ математических моделей нейронных сетей различной структуры. Решаются задачи моделирования и обучения нейронных сетей.

<u>Типовое задание.</u>

№ 1. Электрическая или химическая нейронная модель взаимодействия нейронов описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i(t) = -\lambda\left[1 + R\exp\left(-x_i^2(t)\right)\right]x_i(t) +$$

$$+\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(t)\left(x_j(t) - x_i(t)\right), \text{ если } \sum_{i=1}^{n} x_i < M,$$

$$\dot{x}_i(t) = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} x_i \ge M,$$

$$x_i(0) = a_i, \ i = \overline{1,n},$$

$$| w_{ij}(t) | \le a_{ij}, \ i, j = \overline{1,n}, \text{ п.в. } t \in [0,T],$$

где $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ - заданные непрерывные функции, α_{ij}, ε_i, c_i, M_i, a_{ij}, R, λ - заданные положительные параметры. Весовые коэффициенты $w_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1,n}$, определяющие влияние j-го нейрона на i-й, выбираются из условия минимума функционала $I(w(\cdot))$, в котором подынтегральная функция выбирается в зависимости от программы обучения. Эта функция, характеризует общую энергию нейронной сети и корреляцию с заданным состоянием системы:

$$J(w)=\int_0^T\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}w_{ij}^2(t)+\sum_{i=1}^n\varepsilon_i\left(x_i(t)-\psi(t)\right)^2\right]dt+$$
$$+\sum_{i=1}^n M_i\left(x_i(T)-A_i\right)^2+\sum_{i=1}^n c_i x_i\,(T).$$

Построить краевую задачу принципа максимума для данной модели нейронной сети.

№2. Записать дискретную аппроксимацию и алгоритм нахождения приближенного решения для задачи № 1.

Тема 7. Принцип максимума. Устойчивость оптимальных решений. Методы Ляпунова А.

В этом разделе изучаются необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления в виде принципа максимума Понтрягина. Затем рассматривается устойчивость оптимального решения. Для этого можно использовать учебные пособия [2, 6] из списка основной литературы.

Типовые задания.

№1. В следующей задаче, моделирующий процесс погашения эпидемии в неоднородном сообществе, выписать необходимые условия оптимальности, найти оптимальное управление, записать краевую задачу принципа максимума Понтрягина.

$$J(u)=\int_0^T(x_1^2(t)+u^2(t))dt+x_2(T)\to\inf,$$
$$\dot{x}_1(t)=x_1^2(t)-x_2(t)-u(t)x_1(t),$$
$$\dot{x}_2(t)=x_1(t)x_2(t),$$
$$x_i(0)=A_i,\quad i=1,2,$$
$$0\le u(t)\le 1.$$

№2. Исследовать на устойчивость линейную систему $\dot{x}(t)=Ax(t)$, если:

а) $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&3&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\0&-1&4\\1&0&-10\end{pmatrix}$.

Тема 8. Численные методы построения оптимального решения (метод проекции градиента, методы внешних и внутренних штрафных функций, итерационные методы) в задачах оптимизации весовых коэффициентов нейронных сетей.

Типовое задание.

№ 1. Построить алгоритм для решения задачи оптимального управления, используя метод проекции градиента.

Алгоритм построения приближенного оптимального решения (метод проекции градиента)

1. Зададим произвольный набор векторов $(u^l)^{(0)}$, $l=\overline{0,q-1}$, здесь индекс в скобках означает номер итерации, в данном случае – нулевой.

2. Используя начальные значения (x^0) и набор $(u^l)^{(0)}$, вычислим x^l, $l=\overline{1,q}$, В результате получим набор векторов $x^1,\dots,x^q$, соответствующий $(u^l)^{(0)}$, который обозначим $(x^l)^{(0)}$.

3. Вычислим значение функции I, используя $(u^l)^{(0)}$ и $(x^l)^{(0)}$, и обозначим эту величину $I^{(0)}$. Здесь верхний индекс в скобках соответствует номеру итерации.

4. Определим сопряженные вектора $(p^{l+1})^{(0)}$ по рекуррентным формулам. Вычисление идёт начиная с индекса q и кончая индексом 1.

5. Найдем управление u_i^l, $l=\overline{0,q-1}$, соответствующее первой итерации $(u^l)^{(1)}$, по формуле (метод градиентного спуска)

$$(u_i^l)^{(k+1)}=(u_i^l)^{(k)}-\alpha^{(k)}\left(\frac{\partial L}{\partial u^l{}_i}\right)^{(k)},$$

где $\alpha^{(k)}>0$ – величина шага градиентного спуска, $L(x,u,p)$ - функция Лагранжа для данной задачи.

Для новых значений управления проверяем условия выполнения ограничений на управление. Если условие не выполняется, то строим проекцию управление на допустимое множество.

6. Аналогично строим $(x^l)^{(1)}$. Находим значение минимизируемой функции I, используя $(u^l)^{(1)}$ и $(x^l)^{(1)}$, и обозначим эту величину $I^{(1)}$. Вычислим приращение $\Delta I^{(1)}=I^{(0)}-I^{(1)}$.

7. Если $\Delta I^{(1)}>0$, то заменим на втором шаге $(u^l)^{(0)}$ на $(u^l)^{(1)}$; если $\Delta I^{(k)}\le 0$, то уменьшим шаг градиентного спуска $\alpha^{(k)}$ в два раза и повторим процесс.

8. Итерационный процесс продолжим до тех пор, пока не выполнится одно из условий $\Delta I^{(k)}<\varepsilon$; $\left\|u^{(k+1)}-u^{(k)}\right\|\le\varepsilon$; $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|\le\varepsilon$,

где $\varepsilon>0$ - заданная точность.

Если разбиение шага $\alpha^{(k)}$ не позволяет уменьшить минимизируемый функционал, то уменьшим Δt или перейдем к новому алгоритму.

Тема 9. Аппроксимация непрерывной модели дискретной. Точность аппроксимации.

В данном разделе рассматриваются методы построения дискретной аппроксимации непрерывной модели. Вводиться понятие точности и порядка аппроксимации. Для решения рекомендуется использовать учебные пособия [1, 2, 4, 6] из основного списка.

<u>Типовое задание. (тема 17).</u>

№1. Выписать дискретную аппроксимацию непрерывной задачи, моделирующей процесс погашения эпидемии в неоднородном сообществе.

$$\Phi_k(x,u) = \int_0^T [x_1 + x_2 + d(u_1+u_2)]dt + \int_0^T A_k\left(\max\{-x_1;0\}\right)^{2r} dt +$$

$$+ \int_0^T B_k\left(\max\{-x_2;0\}\right)^{2r} dt + C_k(\max\{-x_1(T);0\})^{2r} + D_k(\max\{-x_2(T);0\})^{2r} \to \inf,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - u_1, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{21}x_2 - u_2, \end{cases} \qquad x_i(0) = x_{0i},\ i = 1,2;$$

№2. Применить для полученной дискретной задачи метод множителей Лагранжа.

Дискретную задачу можно получить из непрерывной заменой производных, например, по схеме Эйлера и интеграла – по правилу левых прямоугольников с шагом дискретизации $\Delta t = Tq^{-1}$. В задаче переход из l– ого состояния в (q+1) – е осуществляется по следующему правилу:

$$x_1^{l+1} = x_1^l + \Delta t(a_{11}x_1^l + a_{12}x_2^l - u_1^l),$$

$$x_2^{l+1} = x_2^l + \Delta t(a_{21}x_1^l + a_{22}x_2^l - u_2^l),$$

с начальными условиями $x_1^0 = x_{01}$; $x_2^0 = x_{02}$.

Управление выбираем на l-ом шаге из условия минимума функции:

$$I(x,u) = \Delta t \sum_{l=0}^{q-1}\left(x_1^l + x_2^l + d(u_1^l + u_2^l) + A_k[\max\{-x_1^l;0\}]^2 + B_k[\max\{-x_2^l;0\}]^2\right) +$$

$$+ C_k(\max\{-x_1^q;0\})^2 + D_k(\max\{-x_2^q;0\})^2;$$

Функция Лагранжа для полученной задачи запишется в следующем виде:

$$L(x,u,p,\lambda_0) = \lambda_0 \Delta t \sum_{l=0}^{q-1}\left(x_1^l + x_2^l + d(u_1^l + u_2^l) + A_k[\max\{-x_1^l;0\}]^2 + B_k[\max\{-x_2^l;0\}]^2\right) +$$

$$+\lambda_0\left[C_k(\max\{-x_1^q;0\})^2 + D_k(\max\{-x_2^q;0\})^2\right] +$$

$$+ \sum_{l=0}^{q-1} p_1^{l+1}\left(x_1^{l+1} - x_1^l - \Delta t(a_{11}x_1^l + a_{12}x_2^l - u_1^l)\right) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{q-1} p_2^{l+1}\left(x_2^{l+1} - x_2^l - \Delta t(a_{21}x_1^l + a_{22}x_2^l - u_2^l)\right).$$

Нерегулярное решение, соответствующее $\lambda_0 = 0$, не существует, так как в этом случае $p_1(t) = p_2(t) \equiv 0$.

Условия стационарности из теоремы о необходимых условиях оптимальности для регулярного случая ($\lambda_0 = 1$), в случае внешних штрафных функций запишем в следующем виде

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^l} = \Delta t + p_1^l - p_1^{l+1} - \Delta t a_{11} p_1^{l+1} - a_{21}\Delta t p_2^{l+1} - 2\Delta t A_k \max\left\{-x_1^l;0\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2^l} = \Delta t - a_{12}\Delta t p_1^{l+1} + p_2^l - p_2^{l+1} - a_{22}\Delta t p_2^{l+1} - 2\Delta t B_k \max\left\{-x_2^l;0\right\} = 0 \quad l = \overline{0, q-1}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^q} = -2C_k \max\left\{-x_1^q;0\right\} + p_1^q = 0.$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2^q} = -2D_k \max\left\{-x_2^q;0\right\} + p_2^q = 0.$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_i^l} = d\Delta t + \Delta t p_i^{l+1}, \qquad l = \overline{0,q-1}, \ \ \mathrm{i} = 1,2.$$

Таким образом, сопряженные вектора в методе внешних штрафных функций определяются с помощью рекуррентных соотношений, с соответствующими граничными условиями

$$p_1^l = -\Delta t + p_1^{l+1} + \Delta t a_{11} p_1^{l+1} + \Delta t a_{21} p_2^{l+1} + 2\Delta t A_k \max\left\{-x_1^l;0\right\},$$
$$p_2^l = -\Delta t + \Delta t a_{12} p_1^{l+1} + p_2^{l+1} + a_{22}\Delta t p_2^{l+1} + 2\Delta t B_k \max\left\{-x_2^l;0\right\},$$
$$p_1^q = 2C_k \max\left\{-x_1^q;0\right\}, \quad p_2^q = 2D_k \max\left\{-x_2^q;0\right\}.$$

Легко убедиться, что если $\Delta t \to 0$, то эти соотношения переходят в дифференциальные уравнения для сопряженных функций в непрерывной задаче.

Тема 10. Моделирование процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Типовое задание.

№ 1. Выписать необходимое условие оптимальности для следующей задачи с отклоняющимся аргументом.

Процесс распространения заболевания в n социальных группах описывается системой $2n$ дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием: $\dot{x}_i(t) = x_i(t)\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} y_j(t)}{x_j(t)+y_j(t)}$, $i = \overline{1,n}$, $t \in [0,T]$,

$$\dot{y}_i(t) = -x_i(t-h)\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} y_j(t-h)}{x_j(t-h)+y_j(t-h)} - \gamma_i y_i(t) - u_i(t) y_i(t), \ i = \overline{1,n}, \ t \in [0,T],$$

с начальными условиями , заданными непрерывными функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i=1,\dots,n$, на начальном интервале запаздывания $[-h,0]$:

$x_i(t) = \alpha_i(t)$, $y_i(t) = \beta_i(t)$, $i=1,\dots,n$, $t \in [-h,0]$,

В предложенной модели процесс распространения заболевания управляется с помощью введения карантина. Затраты на проведение карантина ограничены. Это требование выражается условием

$$0 \le u_i(t) \le B_i \ , \ i = \overline{1,n} \ ,$$

где B_i – величина , характеризующая максимальную часть инфицированных людей, отправленных на карантин .

Целью является минимизация количества инфицированных людей , людей , находящихся на карантине , и затрат на карантин во всех социальных группах:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{n} \left(y_i(t) + u_i(t) y_i(t) + c_i u_i(t) \right) dt \to inf ,$$

где T – фиксированное время процесса , на котором рассматривается распространение заболевание , c_i – стоимость изоляции i –ой социальной группы.

Тема 11. Моделирование процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями. Модель «Хищник-Жертва».

В этом разделе изучаются постановки задач, которые формализуют модель «Хищник – Жертва». Для данных моделей применяется теория оптимального управления. Исследуется влияние параметров модели на решение задачи. При решении заданий из данного раздела можно использовать учебные пособия [2, 3, 4] из основного списка литературы.

Типовое задание.

№ 1. Записать краевую задачу принципа максимума Понтрягина для модели «Хищник – Жертва» (Лотки Вольтерра):

Требуется найти максимум функционала

$$I(u)=\int_0^T\sum_{i=1}^2(\rho_i-c_i)N_iu_i\,dt+\sum_{i=1}^2 M_i\left(N_i(T)-A_i\right)^2$$

при динамических ограничениях:

$$\dot N_1=N_1(\varepsilon_1-\gamma_1N_2)-u_1N_1,\qquad \dot N_2=N_2(-\varepsilon_2+\gamma_2N_1)-u_2N_2,$$

$$0\le u_i\le b_i,\ b_i>0,\quad i=1,2,$$

фазовое ограничение задано системой неравенств $N_i(t)\ge 0,\quad t\in[0,T]$.

Тема 12. Нейронная сеть, описываемая системой интегро-дифференциальными уравнениями. Учет эффекта запаздывания сигнала в нейронных сетях. Случай малого запаздывания.

Типовое задание.

№ 1. Для следующих моделей нейронной сети применить необходимые условия оптимальности и исследовать зависимость решения от величины запаздывания. Динамические свойства систем связанных "нейронов" могут быть смоделированы следующими системами нелинейных дифференциальных уравнений

$$\text{а) } \dot x_i(t)=-\beta_i x_i(t)+f_i^{\ell}\left(\sum_{j=1}^n w_{ij}(t-h)x_j(t)+\sum_{j=1}^n b_{ij}(t)u_j(t)\right),$$

$$\text{б) } \dot x_i(t)=-\beta_i x_i(t)+f_i^{\ell}\left(\sum_{j=1}^n w_{ij}(t)x_j(t-h)\right)+\sum_{j=1}^n b_{ij}(t)u_j(t),$$

$$\text{в) } \dot x_i(t)=-\beta_i x_i(t-h)+sign\left(\sum_{j=1}^n w_{ij}(t)x_j(t)+\sum_{j=1}^n b_{ij}(t)u_j(t)\right),$$

$$x_i(0)=a_i,\ i=\overline{1,n},\ t\in[0,T].$$

$$\ell=\begin{cases}1, & S(t,x)<0,\\ 1, & S(t,x)\ge 0.\end{cases}$$

Здесь каждая функция $x_i(t),\ i=\overline{1,n}$, есть действительная функция состояния i-го "нейрона", функция $u_i(t),\ i=\overline{1,m}$, является внешним воздействием на i-й "нейрон". Коэффициенты $w_{ij}(t),\ i,j=\overline{1,n}$, обозначают веса или "синоптические связи", b_{ij} - интенсивность внешних воздействий. Функции f_i (функции активации) характеризуют, как i-й "нейрон" реагирует на совокупный сигнал. Некоторые авторы полагают, что изменяя внешний сигнал можно управлять каждым нейроном, но разумно предположить, что число таких входов гораздо меньше, чем число функций состояния, т.е. $m << n$.

Весовые коэффициенты $w_{ij}(t)$ и внешние сигналы $u_i(t)$ должны быть выбраны так, чтобы минимизировать заданный функционал

$$J(w,u)=\int_0^T E(t,w(t),u(t),x(t))dt+\Phi(x(T))$$

с учетом следующих ограничений на весовые коэффициенты и внешние воздействия:

$$|w_{ij}(t)|\le A_{ij},\ i,j=\overline{1,n},\ |u_j(t)|\le B_j,\ \ j=\overline{1,m},$$

где $A_{ij},\ B_j$ - заданные положительные числа.

VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Программное обеспечение

Google Chrome	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus	бесплатно
OpenOffice	бесплатно
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно

IX. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Учебная аудитория с мультимедийной установкой (Ноутбук, проектор, колонки), наличие классной доски. Класс ПЭВМ класса Intel с установленным программным обеспечением.

X. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины