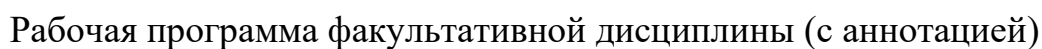


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

~~Руководитель ООП~~

«21» мая 2024 г.



Направление подготовки

профиль

Для студентов

3 курса, очной формы обучения

Составитель: к.ф.-м.н., доцент Кузнецова Ю.В.

Тверь, 2024

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины является: ознакомление студентов с основными понятиями теории интегральных уравнений и вариационного исчисления, методами решения интегральных уравнений и задач вариационного исчисления.

Первая часть курса посвящена основам теории вариационного исчисления, в которой дается определение функционалов в нормированных пространствах, сильного и слабого экстремума, исследуется простейшая задача вариационного исчисления, доказываются теоремы о необходимых и достаточных условиях экстремумов, рассматриваются обобщения задачи с закрепленными концами на функционалы более общего вида, рассматриваются вариационные задачи с подвижными границами и задачи на условный экстремум.

Во второй части курса изучаются линейные интегральные уравнения Фредгольма с симметричным ядром, свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля. Изучаются интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром, интегральные уравнения Вольтерра второго рода. Рассматриваются интегральные уравнения Фредгольма первого рода, методы регуляризации.

Задачами освоения дисциплины являются:

- ознакомление с основными задачами вариационного исчисления;
- исследование функционала на экстремум в рамках поставленной вариационной задачи;
- освоение методов решений интегральных уравнений.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Интегральные уравнения» является факультативной. Содержательная часть производственной деятельности бакалавра направлена на научно-исследовательскую и научно-инновационную сферу. В рамках этих направлений дисциплина предполагает изучение методов вариационного исчисления и интегральных уравнений.

Дисциплина следует за дисциплинами «Математический анализ» и «Дифференциальные уравнения» и является важной для последующих базовых учебных, а также для специальных курсов таких как «Теоретическая механика», «Электродинамика», «Физика конденсированного состояния вещества».

От слушателей требуются следующие предварительные знания и навыки из курсов функционального анализа и линейной алгебры: решение дифференциальных уравнений высших порядков, дифференцирование и интегрирование функций одной переменной, свойства определенных интегралов, вычисление и свойства частных производных и дифференциалов функций многих переменных первого и высших порядков, алгебраические операции над матрицами, вычисление собственных чисел и собственных

векторов квадратных матриц, общие свойства линейных пространств и линейных операторов.

3. Объем дисциплины: 3 зачетных единиц, 108 академических часов, в том числе **контактная работа:** лекции 34 часа, практические занятия 34 часа; **самостоятельная работа:** 40 час.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения

Зачет

6. Язык преподавания

русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа–наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)		Самостоятельная работа (час.)
		Лекции	Практические занятия	
Введение. Основные понятия. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям.	5	2	2	2
Уравнение Вольтерра I и II-ого рода.	9	2	2	4
Уравнение Фредгольма I и II-ого рода.	10	2	2	4
Собственные значения и собственные функции однородного уравнения Фредгольма.	6	2	2	2
Интегральные преобразования Лапласа и Фурье.	9	2	2	6
<i>Промежуточное аттестационное занятие</i>			2	
Основные понятия вариационного исчисления.	6	2	2	2
Уравнение Эйлера. Экстремали. Основные случаи интегрируемости уравнения Эйлера	9	4	2	2
Необходимые условия экстремума. Уравнение Эйлера.	8	2	2	4
Функционалы, содержащие производные порядка выше 1-ого. Функционалы, зависящие от нескольких функций.	11	2	4	6
Многомерные вариационные задачи.	9	2	2	5
Достаточные условия экстремума функционала.	7	2	2	4
Задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.	8	4	4	4
Вариационные задачи на условный экстремум	9	6	2	6
<i>Промежуточное аттестационное занятие</i>	2		2	
ИТОГО:	108	34	34	40

III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем	Вид занятия	Образовательные технологии
Введение. Основные понятия. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям.	Лекция, практическое	<i>Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии</i>

Уравнение Вольтерра I и II-ого рода.	Лекция, практическое	Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии
Уравнение Фредгольма I и II-ого рода.	Лекция, практическое	Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии
Собственные значения и собственные функции однородного уравнения Фредгольма.	Лекция, практическое	Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии
Интегральные преобразования Лапласа и Фурье.	Лекция, практическое	Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии
Основные понятия вариационного исчисления.	Лекция, практическое	Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии
Уравнение Эйлера. Экстремали. Основные случаи интегрируемости уравнения Эйлера	Лекция, практическое	Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии
Необходимые условия экстремума. Уравнение Эйлера.	Лекция, практическое	Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии
Функционалы, содержащие производные порядка выше 1-ого. Функционалы, зависящие от нескольких функций.	Лекция, практическое	Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии
Многомерные вариационные задачи.	Лекция, практическое	Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии
Достаточные условия экстремума функционала.	Лекция, практическое	Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии

Задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.	Лекция, практическое	<i>Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии</i>
Вариационные задачи на условный экстремум	Лекция, практическое	<i>Лекция (традиционная, проблемная, лекция-визуализация) Дискуссионные технологии Дистанционные образовательные технологии</i>

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Вопросы для зачета:

1. Функционалы в линейном пространстве.
2. Основные понятия вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.
3. Необходимые условия экстремума. Уравнение Эйлера. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Примеры.
4. Необходимые условия экстремума для функционала, зависящего от нескольких функций.
5. Необходимые условия экстремума для функционала, содержащего производные высших порядков.
6. Поле экстремалей. Условия возможности включения экстремали в поле экстремалей
7. Необходимые и достаточное условие экстремума функционала.
8. Вариационные задачи с подвижными концами. Постановка задачи. Условие трансверсальности. Трансверсальность и ортогональность.
9. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача.
10. Интегральные уравнения. Классификация И.У.
11. Интегральные уравнение Вольтерра.
12. Интегральные уравнение Фредгольма 2-го рода.
13. Интегральные преобразования Фурье и Лапласа.
14. Интегральные уравнение Фредгольма 1-го рода.

ПРИМЕР ЗАДАНИЯ:

1 вариант
1. Найти экстремали в задачах со свободными концами: $V[y] = \int_1^2 (yy' - x^2 y'^2) dx$
2. Построить функцию Грина: $y''=f(x), \quad y(-1)=y(1)=0, \quad -1 \leq x \leq 1$
3. Определить собственные функции и собственные значения интегрального уравнения: $y(x) = \lambda \int_0^\pi (s(x-1) + x(s-1)) y(s) ds$
4. Построить резольвенту для следующих ядер: $K(x,s)=xe^s, \quad a=-1, \quad b=1$
5. Построить резольвенту интегрального уравнения Вольтерра 2-ого рода и найти его

решение при $\lambda=1$:

$$y(x) = \lambda \int_0^x e^{-(x-s)} y(s) ds + x e^{x^2/2}$$

Шкала оценивания: Максимальная возможная оценка за модуль составляет 50 баллов. Она складывается из оценки уровня знаний (максимум 20 баллов), умений (максимум 15 баллов) и владений (максимум 15 баллов).

1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций.

Типовые контрольные задания

Вариант 1:

№1

Найти экстремальные кривые функционала:

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx, \quad \text{при условиях } y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

№2 Найти экстремальную кривую, соответствующую минимальной площади поверхности вращения (рис.1).

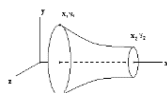


Рис.1

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

Вариант 2

№1 Найти экстремали следующего функционала

$$f(x) = \int_0^1 (x^2 + 2x^2 + x^2) dt,$$

удовлетворяющие условиям: $x(0) = 0, x(1) = \text{sh}1, x(0) = 0, x(1) = e$.

№2. Найти кратчайшее

расстояние от т. A(1,1) до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$

Вариант 3

№1 Найти вариацию функционала

$$V[y] = \int_0^\pi y' \cos y dx$$

№2 Найти экстремали в вариационной задаче, используя частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера:

$$V[y] = \int_0^4 (y + \frac{y^3}{3}) dx, \quad y(0) = -2, \quad y(4) = 0$$

Вариант 4

№1 Получить уравнения колебаний струны, считая, что плотность потенциальной энергии элемента струны пропорциональна его относительному удлинению.

№2 Исследовать на экстремум функционалы в задаче с закрепленными концами (найти экстремали и проверить достаточные условия каким-либо способом):

$$V[y] = \int_0^1 (e^y y^{1/2}) dx$$

$$y(0)=0, y(1)=\ln 4$$

Вариант 5

№1 Среди всех кривых, соединяющих точки $(-1, \operatorname{ch} 1)$ и $(1, \operatorname{ch} 1)$, определить ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.

№2 Построить резольвенту интегрального уравнения Вольтерра 2-ого рода и найти его решение при $\lambda=1$:

$$y(x) = \lambda \int_0^x e^{-(x-s)} y(s) ds + x e^{x^2/2}$$

Вариант 6

№1 Построить резольвенту для следующих ядер:

$$K(x,s)=xe^s, \quad a=-1, \quad b=1$$

№2 Проверить выполнимость условия Якоби:

$$V[y] = \int_{-1}^1 (12xy + y^{1/2} + x^2) dx, \quad y(-1)=-2, \quad y(1)=0$$

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература:

1. Васильева А. Б. Интегральные уравнения [Электронный ресурс]: учеб. — СПб.: Лань, 2009. — 160 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/42>.
2. Петрушко И. М. Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. Лекции и практикум [Электронный ресурс] : учеб. пособие. — СПб.: Лань, 2008. — 608 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/306>.
3. Демидович Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения [Электронный ресурс]: учеб. пособие. — СПб.: Лань, 2010. — 400 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/537>.

б) Дополнительная литература:

1. Хеннер В. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, основы специальных функций и интегральных уравнений [Электронный ресурс]: учеб. пособие. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 320 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/96873>.

2. Рябенкий В. С. Введение в вычислительную математику. - М.: Физматлит, 2008. - 285 с. - [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68380>
3. Полянин, А.Д. Справочник по интегральным уравнениям [Электронный ресурс] : справ. / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2003. — 608 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2278>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- 1) Научная библиотека ТвГУ – <http://library.tversu.ru>;
- 2) Электронно-библиотечная система Znanium.com – <http://znanium.com/>
- 3) Электронная библиотека ЮРАЙТ – <https://biblio-online.ru/>
- 4) Электронно-библиотечная система IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>
- 5) Электронно-библиотечная система издательства «Лань» – <https://lanbook.com/>
- 6) Электронно-библиотечная система BOOK.ru – <https://www.book.ru/>
- 7) Научная электронная библиотека eLibrary.ru: <https://elibrary.ru/> ;
- 8) Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» – <http://window.edu.ru>.

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Занятия представляют собой лекции и практические занятия. Курс лекций направлен на ознакомление с соответствующим математическим аппаратом интегральных уравнений, вариационного исчисления и формирование теоретических основ изучаемой дисциплины.

Практические занятия призваны сформировать у студентов навыки и умения, направленные на анализ и классификацию интегральных уравнений и задач вариационного исчисления, методов их решения. На практических занятиях при выполнении поставленных задач формируется умение логически мыслить и способность к самостоятельному приобретению новых знаний в соответствии с профессиональными потребностями и интересами.

Примеры практических задач

1. Найти экстремали в задачах со свободными концами:

А) $V[y] = \int_1^2 (yy' - x^2 y^{1/2}) dx$

Б) $V[y] = \int_1^2 (2y - yy' + xy^{1/2}) dx$

2. Определить собственные функции и собственные значения интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} (s(x-1) + x(s-1)) y(s) ds$$

3. Построить резольвенту для следующих ядер:

А) $K(x,s)=xe^s$, $a=-1$, $b=1$

Б) $K(x,s)=xs$, $a=-1$, $b=1$

4. Построить резольвенту интегрального уравнения Вольтерра 2-ого рода и найти его решение при $\lambda=1$:

А) $y(x) = \lambda \int_0^x e^{-(x-s)} y(s) ds + x e^{x^2/2}$

Б) $y(x) = \lambda \int_0^x a^{x-s} y(s) ds + (ae)^x$

5. Найти вариацию:

А) $V[y] = \int_0^1 (xy + y^{1/2}) dx$

Б) $V[y] = \int_0^\pi y' \cos y dx$

6. Найти экстремали в вариационной задаче, используя частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера:

А) $V[y] = \int_0^1 (e^y + xy') dx$ $y(0)=0$ $y(2)=4$

Б) $V[y] = \int_0^4 (y + \frac{y^3}{3}) dx$, $y(0)=-2$, $y(4)=0$

7. Проверить выполнимость условия Якоби:

$$V[y] = \int_{-1}^1 (12xy + y^{1/2} + x^2) dx, \quad y(-1)=-2, \quad y(1)=0$$

8. Используя условие Лежандра, исследовать на экстремум функционал:

$$J[y] = \int_0^1 (y^{1/3} - 2y') dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=2$$

9. Найти экстремали следующих функционалов:

1.
$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^2}{2} + e^{-t} x + \frac{x^2}{2} + 2tx + t \right) dt, \\ x(0)=1, \quad x(\pi/2) = e^{-\pi/2}. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{x^2}{2} + (2t^2 - 1)x + (t-2)x^2 + t^2 x + 2tx \right) dt, \\ x(0)=1, \quad x(\pi/4) = -\pi/8. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} f(x) = \int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2} + x \cos t + \frac{(3t^2 + 16)x^2}{2} + t^3 x + 1 \right) dt, \\ x(0)=0, \quad x(\pi) = \operatorname{sh} 4\pi. \end{cases}$$

10. Найти экстремали функционалов вида:

А) $V[y, z] = \int_{-1}^1 (2xy - y^{1/2} + \frac{z^3}{3}) dx$, $y(1)=0$, $y(-1)=2$, $z(1)=1$, $z(-1)=-1$

$$\text{Б)} V[y, z] = \int_{1/2}^1 (y'^2 - 2yz') dx \quad y(1/2)=2, \quad y(1)=1, \quad z(1/2)=15, \quad z(1)=1$$

11. Найти экстремали функционалов вида:

$$\text{А)} V[y] = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + y^2 - 2yx^3) dx$$

$$\text{Б)} V[y] = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y \sin x) dx$$

12. Исследовать функционал на экстремум:

$$\text{А)} V[y] = \int_1^2 \frac{x^3}{y^2} dx, \quad y(1)=1, \quad y(2)=4$$

$$\text{Б)} V[y] = \int_{-1}^2 y' (1 + x^2 y') dx, \quad y(-1)=1, \quad y(2)=4$$

13. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения:

$$\varphi(x) - \lambda \int \sin^2(x) \varphi(t) dt = 0.$$

14. Составить уравнение Вольтерра, соответствующее задаче Коши:

$$y'' + xy + y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1$$

Вопросы для самостоятельного изучения

1. Функционалы в линейном пространстве. Близость кривых. Непрерывность функционала.
2. Основные понятия вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.
3. Уравнение Эйлера. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Примеры.
4. Инвариантность уравнения Эйлера.
5. Поле экстремалей
6. Достаточное условие экстремума функционала.
7. Условный экстремум. Задача Лагранжа.
8. Изопериметрические задачи.
9. Уравнение Вольтерра.
10. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода.
11. Уравнение Фредгольма с вырожденными ядрами
12. Собственные функции и собственные значения однородного уравнения Фредгольма.
13. Теоремы Фредгольма.
14. Резольвента. Решение уравнений с помощью резольventы.
15. Решение уравнений Фредгольма с помощью определителей Фредгольма.
16. Интегральное уравнение Абеля и его обобщения.
17. Применение преобразования Фурье к решению некоторых интегральных уравнений.
18. Применение преобразования Лапласа к решению некоторых интегральных уравнений.
19. Применение преобразования Меллина к решению некоторых интегральных уравнений.

20.Метод регуляризации А.Н. Тихонова.

VII. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специальных* помещений	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
Учебная аудитория № 202Б (170002 Тверская обл., г. Тверь, Садовый пер., д. 35)	1. Комплект учебной мебели на 25 посадочных мест. 2. Экран настенный 153х203 3. Переносной комплект мультимедийной техники.	Adobe Acrobat Reader DC – бесплатно Microsoft Windows 10 Enterprise - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017 Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г. Google Chrome – бесплатно MS Office 365 pro plus - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1.			
2.			