

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 09.09.2024 12:08:35  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



Утверждаю:

Руководитель ООП:

*Шаров* Шаров Г.С.

«30» 09 2024 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## Алгебра и теория чисел

Направление подготовки

02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование  
информационных систем

Профиль подготовки

Математические основы информатики

Для студентов I–II курса

Форма обучения

Очная

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Составитель:

к.ф.-м.н. Рыбаков М.Н.

Тверь – 2024

## I. Аннотация

### 1. Цели и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины являются освоение основ фундаментальных знаний, позволяющих разобраться в математической основе, обеспечивающей возможность деятельности специалиста в той части, которая связана с алгеброй и теорией чисел, решать стандартные задачи, давать интерпретацию полученным результатам.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части блока дисциплин, формирует универсальные и общепрофессиональные компетенции.

Предварительные знания, необходимые для освоения дисциплины, — это знания, полученные при изучении школьной программы по алгебре и началам анализа, а также по геометрии.

Освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее для следующих дисциплин: дифференциальные уравнения, функциональный анализ, информатика и программирование, теория информации.

### 3. Объем дисциплины:

14 зачетных единиц, 504 академических часа, в том числе

**контактная работа:** лекции 106 часов, практические занятия 106 часов, **самостоятельная работа и контроль:** 292 часа.

### 4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

<b>Формируемые компетенции</b>	<b>Требования к результатам обучения</b> В результате изучения дисциплины студент должен:
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя её базовые составляющие УК-1.2 Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Оперировать базовыми знаниями в области основных математических и естественно-научных дисциплин, предусмотренных учебным планом ОПК-1.2 Решает типовые задачи основных математических и естественно-научных дисциплин, применяя стандартные приемы и методы

	ОПК-1.3 Выбирает различные методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний, полученных при изучении основных математических и естественно-научных дисциплин
--	---

## 5. Форма промежуточной аттестации

Зачёт во 2-м семестре, экзамен в 1-м и 3-м семестрах.

## 6. Язык преподавания русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

### 1. Структура дисциплины для студентов очной формы обучения

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Самостоя- тельная работа, в том числе Контроль (час.)	
		Лекции		Практические занятия			Контроль самостоя- тельной работы (в том числе курсовая работа)
		все- го	в т.ч. прак- тич подгот	все- го	в т.ч. прак- тиче- ская подго- товка		
1. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса Теория определителей	26	8		8		10	
2. Арифметические пространства. Общая теория систем линейных уравнений.	34	11		9		14	
3. Основные понятия в алгебре. Поле комплексных чисел.	26	7		9	1	10	
4. Теория чисел	48	12		12		24	
5. Алгебра матриц	16	4		4		8	
6. Кольцо многочленов от одной буквы	26	8		8		10	

7. Линейные пространства	28	6		6			16
8. Линейные отображения	28	7		7			14
9. Евклидовы пространства	18	5		5			8
10. Квадратичные формы	20	4		4			12
11. Жорданова форма матриц	20	4		4			12
12. Основы теории групп	40	8		8			24
13. Основы теории колец. Расширения полей	48	12		12			24
14. Конечные поля	54	14		14			26
Итого	504	106		106	2		292

### III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем (в строгом соответствии с разделом II РПД)	Вид занятия	Образовательные технологии
1. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса Теория определителей	Лекция, практическое занятие	Активное слушание, лекция, методы группового решения задач
2. Арифметические пространства. Общая теория систем линейных уравнений.	то же	то же
3. Основные понятия в алгебре. Поле комплексных чисел.	то же	то же
4. Теория чисел	то же	то же
5. Алгебра матриц	то же	то же
6. Кольцо многочленов от одной буквы	то же	то же
7. Линейные пространства	то же	то же
8. Линейные отображения	то же	то же
9. Евклидовы пространства	то же	то же
10. Квадратичные формы	то же	то же
11. Жорданова форма матриц	то же	то же
12. Основы теории групп	то же	то же

13. Основы теории колец. Расширения полей	то же	то же
14. Конечные поля	то же	то же

#### IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

##### 1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций.

Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	Докажите существование конечного поля каждого порядка, являющегося степенью простого числа. Постройте примеры.	Уверенное владение, задание полностью выполнено – 3 балла. Наличие отдельных ошибок – 1 – 2 балла. Большое количество ошибок – 0 баллов.
	Дайте определения и опишите свойства действий с матрицами. Кольцо квадратных матриц.	Правильное выполнение задания – 3 балла. Наличие отдельных ошибок – 1 – 2 балла.. Большое количество ошибок, решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.
	Дайте определение и опишите свойства произведения матриц.	Глубокие знания – 3 балла. Неуверенные знания – 1 – 2 балла. Серьезные пробелы в знаниях, ошибки – 0 баллов
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Докажите существование многочлена произвольной степени над конечным полем, который неприводим над этим полем.	Уверенное владение, задание полностью выполнено – 3 балла. Наличие отдельных ошибок – 1 – 2 балла. Большое количество ошибок – 0 баллов.

	<p>Дайте определения и опишите сравнимость по данному модулю, свойства кольца классов вычетов по данному модулю.</p>	<p>Правильное выполнение задания – 3 балла. Наличие отдельных ошибок – 1 – 2 балла.. Большое количество ошибок, решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.</p>
	<p>Дайте определение и опишите свойства определителей. Критерий того, что определитель квадратной матрицы равен 0.</p>	<p>Глубокие знания – 3 балла. Неуверенные знания – 1 – 2 балла. Серьезные пробелы в знаниях, ошибки – 0 баллов</p>

## 2. Экзаменационные вопросы и задания по учебной дисциплине.

- Метод Гаусса: доказательство теоремы о возможности приведения системы к трапециoidalному виду. Общее и частное решение.
- Свойства перестановок. Свойства подстановок.
- Понятие определителя, его свойства.
- Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя.
- Теорема Крамера.
- Определитель Вандермонда.
- Понятие арифметического пространства, определения линейно зависимой и независимой системы векторов. Критерий линейной зависимости.
- Теорема о линейной зависимости линейных комбинаций и следствия из нее.
- Базис и ранг системы векторов.
- Эквивалентные системы векторов: их свойства, доказательство равенства рангов эквивалентных систем.
- Теорема о ранге матрицы.
- Равенство рангов системы строк и столбцов матрицы. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях матрицы. Перечисление базисов системы векторов.
- Критерий того, что определитель квадратной матрицы равен 0.
- Система линейных однородных уравнений. Ранг и базис множества решений.
- Системы неоднородных линейных уравнений: теорема Кронекера-Капелли; связь с соответствующей системой линейных однородных уравнений.
- Делимость целых чисел. Деление с остатком. Алгоритм Евклида. Разложение НОД. Критерий взаимной простоты. Простые числа и их

бесконечность. Существование и единственность разложения на простые множители.

- Решение сравнений первой степени. Использование алгоритма Евклида.
- Понятие алгебраической операции. Примеры и контр-примеры. Понятие полугруппы. Единственность единицы. Единственность обратного элемента в полугруппах.
- Группы. Группа подстановок. Примеры подгрупп.
- Понятие кольца. Понятие поля. Делители нуля в кольце и их отсутствие в поле. Примеры.
- Построение поля комплексных чисел.
- Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия с комплексными числами в этой форме. Формула Муавра. Свойства модуля комплексного числа.
- Извлечение корня  $n$ -ой степени из комплексного числа в тригонометрической форме. Расположение корней на плоскости.
- Группа корней из единицы. Понятие первообразного корня, примеры.
- Действия с матрицами. Кольцо квадратных матриц над кольцом.
- Элементарные матрицы. Связь элементарных преобразований с элементарными матрицами.
- Ранг произведения матриц.
- Определитель произведения матриц.
- Критерий обратимости квадратной матрицы над полем. Построение обратной матрицы способом, связанным с алгебраическими дополнениями.
- Критерий обратимости квадратной матрицы над полем. Способ построения обратной матрицы, связанный с приписыванием единичной матрицы.
- Построение кольца многочленов от одной буквы над кольцом.
- Теорема о делении с остатком для кольца многочленов над полем.
- Многочлен как функция. Схема Горнера. Теорема Безу. Теорема о числе корней. Достаточные условия совпадения двух определений многочлена.
- Наибольший общий делитель двух многочленов. Алгоритм Евклида. Ассоциированность наибольших общих делителей.
- Разложение НОД. Критерий взаимной простоты. Свойства взаимно простых многочленов.
- Понятие приводимого многочлена над полем. Взаимная простота неприводимых неассоциированных многочленов. Теорема о разложении многочлена над полем в произведение многочленов, неприводимых над этим полем.

- Кратность неприводимого множителя в каноническом разложении многочлена; ее связь с кратностью этого множителя в производной. Отделение кратных множителей.
- Формулировка основной теоремы алгебры комплексных чисел. Вид неприводимых многочленов над полями комплексных и действительных чисел.
- Понятие линейного пространства. Базис конечномерного линейного пространства. Ранг системы векторов в конечномерном пространстве. Корректность определения ранга.
- Замена базиса в конечномерном линейном пространстве. Матрица перехода. Связь между координатами одного вектора в разных базисах.
- Подпространства линейного пространства. Сумма подпространств. Пересечение подпространств. Связь размерности суммы с размерностью пересечения.
- Построение базиса суммы двух подпространств. Построение базиса пересечения двух подпространств. Прямая сумма подпространств.
- Изоморфизм линейных пространств.
- Линейные отображения. Ядро и образ. Теорема о связи между рангом и дефектом линейного отображения. Способы определения (введения) линейного отображения.
- Матрица линейного преобразования конечномерного линейного пространства и ее изменения при переходе к другому базису. Подобные матрицы.
- Понятие алгебры. Алгебра многочленов от одной буквы над полем. Алгебра квадратных матриц над полем. Изоморфизм алгебр. Алгебра линейных преобразований линейного пространства и ее изоморфизм подходящей алгебры матриц.
- Совпадение характеристических корней и собственных чисел линейного преобразования. Линейная независимость системы собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Собственные подпространства.
- Критерий того, что матрица подобна диагональной. Инвариантные подпространства.
- Определение евклидова пространства. Ортогонализация. Существование ортонормированного базиса.
- Определение евклидова пространства. Вычисление скалярных произведений в произвольном базисе. Вычисление скалярных произведений в ортонормированном базисе. Изоморфизм евклидовых пространств.
- Подпространства евклидова пространства. Дополнение ортонормированного базиса подпространства до ортонормированного базиса пространства. Ортогональное дополнение. Свойства ортогональных дополнений.

- Неравенство Коши. Определения длины вектора и угла между вектором и подпространством. Их корректность. Неравенство треугольника.
- Ортогональные матрицы как матрицы перехода в евклидовом пространстве. Симметрические преобразования евклидовых пространств.
- Существование инвариантных подпространств размерности 1 или 2 в линейном пространстве над полем действительных чисел. Ортогональные преобразования евклидовых пространств.
- Инвариантные подпространства. Корневые подпространства и их инвариантность. Пересечения корневых подпространств, относящихся к различным собственным значениям.
- Разложение линейного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
- Линейная зависимость системы векторов относительно подпространства. Жорданова форма матрицы линейного преобразования, имеющего единственное собственное число.
- Доказательство теоремы о существовании жордановой матрицы линейного преобразования линейного пространства над полем комплексных чисел.
- Доказательство единственности жордановой формы матрицы.
- Полугруппы. Свойства степеней. Понятие группы. Простейшие свойства. Критерий группы.
- Подгруппы. Подгруппа четных подстановок.
- Изоморфизм групп. Примеры. Теорема Кэли.
- Смежные классы. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа о делимости порядка группы на порядок подгруппы.
- Порядок элемента. Циклические группы. Подгруппы циклических групп. Строение групп простого порядка.
- Нормальные подгруппы. Примеры нормальных подгрупп. Контрпримеры. Нормальность подгрупп индекса 2.
- Понятие факторгруппы и его корректность. Примеры построения факторгрупп.
- Понятие гомоморфизма групп. Теорема о гомоморфизме групп.
- Восстановление подгруппы в прообразе из подгруппы в образе.
- Отношение сопряженности в группе. Свойства сопряженных элементов группы.
- Центризатор элемента. Теорема об индексе центризатора элемента конечной группы.
- Центр группы. Нетривиальность центра  $p$ -группы.
- Существование в коммутативной группе порядка  $p$  делящегося на простое  $p$  элемента порядка  $p$ .

- Формулировка теоремы Силова. Доказательство теоремы Силова в части «существование».
- Прямые произведения групп. Критерий разложения группы в прямое произведение своих подгрупп.
- Теорема о строении конечных коммутативных групп.
- Понятие кольца. Подкольца. Понятие идеала. Сумма и пересечение идеалов. Примеры.
- Сравнимость по данному модулю. Кольцо классов вычетов по данному модулю.
- Главные идеалы. Кольцо целых чисел как кольцо главных идеалов. Кольцо многочленов над полем как кольцо главных идеалов. Пример кольца, которое не является кольцом главных идеалов.
- Факторкольцо. Кольцо классов вычетов как пример факторкольца. Поле классов вычетов по простому модулю.
- Поле комплексных чисел как факторкольцо.
- Построение поля частных.
- Теорема существования корня. Поле разложения многочлена.
- Понятие поля. Пример поля, которое содержит иррациональные числа, содержится в поле действительных чисел, но не совпадает с ним.
- Понятие простого поля. Поле рациональных чисел как наименьшее поле, содержащее кольцо целых чисел.
- Характеристика поля. Простые конечные поля. Число элементов в конечном поле.
- Изоморфизм минимальных полей, в которых данный неприводимый многочлен имеет корень. Наименьшая степень расширения поля, в котором неприводимый многочлен имеет корень.
- Существование конечного поля каждого порядка, являющегося степенью простого числа.
- Цикличность мультипликативной группы конечного поля.
- Подполя конечного поля.
- Существование многочлена произвольной степени над конечным полем, который неприводим над этим полем. Конечное поле как множество корней некоторого многочлена.
- Критерий Батлера неприводимости данного многочлена над конечным полем и его применение.
- Решение сравнений второй степени. Квадратичные вычеты. Закон взаимности квадратичных вычетов.
- Функция Эйлера, её вычисление и применение.
- Функция Мёбиуса. Формула обращения Мёбиуса.
- Первообразные корни и индексы. Дискретный логарифм.

## **V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **а) Основная литература**

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - СПб.: Лань, 2021. - 431 с. - Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=30198](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=30198)
2. Бухштаб А. А. Теория чисел. - СПб.: Лань, 2020. - 384 с. - Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=65053](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65053)

### **б) Дополнительная литература**

1. Бухштаб А. А. Теория чисел [Электронный ресурс] - СПб.: Лань, 2015. - 384 с. - Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=65053](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65053)
2. Углирж Ю. Г. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие. – Омск: Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, 2013. – 148 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/24895>
3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. С.-Пб.: Лань, 2010;
4. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977;
5. Сборник задач по алгебре. Под ред. А.И.Кострикина, М.: Наука, 1995.

### **2) Программное обеспечение**

#### **а) Лицензионное программное обеспечение**

Kaspersky Endpoint Security 10 (акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022)

#### **б) Свободно распространяемое программное обеспечение**

- Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО
- ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО
- OpenOffice Бесплатное ПО, лицензионное соглашение: <https://wiki.openoffice.org/wiki/RU/license/lmpl>
- Google Chrome бесплатное ПО
- Яндекс Браузер бесплатное ПО
- Octave Бесплатное ПО

### **3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com) ;
2. ЭБС «ЮРАИТ» [www.biblio-online.ru](http://www.biblio-online.ru) ;
3. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/> ;

4. ЭБС IPRbooks <http://www.iprbookshop.ru/>;
5. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com/>;
6. ЭБС BOOK.ru <https://www.book.ru/>
7. ЭБС ТвГУ <http://megapro.tversu.ru/megapro/Web>
8. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (подписка на журналы) [https://elibrary.ru/projects/subscription/rus\\_titles\\_open.asp?](https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp?) ;
9. Репозиторий ТвГУ <http://eprints.tversu.ru>

#### **4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины:**

<http://www.libraru.tversu.ru> – научная библиотека Тверского государственного университета,

<http://e.lanbook.com/> - электронная библиотека издательства Лань:

<http://www.biblioclub.ru/> - университетская библиотека ONLINE:

<http://lib.mexmat.ru/> – научная библиотека МГУ.

## **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

### **Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Для полноценного усвоения курса студенту необходимо овладеть основными понятиями дисциплины, знать определения, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этим определениям, а также примеры объектов, не удовлетворяющих им. Кроме того, необходимо знать факты, связанные с изучаемыми понятиями. Требуется знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями. Студент должен освоить доказательства основных утверждений и фактов, изучаемых в рамках дисциплины. Часть из этих доказательств целесообразно обсуждать на практических занятиях, например, в форме опроса или докладов.

Практическая и самостоятельная работа включает в себя следующие составляющие.

1. Изучение теоретического материала.
2. Самостоятельное изучение методов решения задач по данному разделу с использованием рекомендованной литературы.
3. Решение задач на лабораторных и практических занятиях.
4. Выполнение контрольных работ.

Для освоения теоретического материала студент должен посещать лекции, быть внимательным на лекции, стараться осмыслить и запомнить ее

основное содержание, составлять конспект лекции, фиксируя основные положения, выводы и помечая вопросы, вызывающие трудности; задавать уточняющие вопросы.

На практических занятиях студент должен предъявить преподавателю выполненное домашнее задание; активно работать над решением задач как у доски, так и на своем рабочем месте.

#### **Требования к рейтинг-контролю.**

1. Распределение баллов между промежуточным и итоговым контролем: 60 баллов – на текущий контроль и 40 баллов – на итоговый контроль (экзамен).
2. Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться, при этом должны быть выполнены следующие ниже условия.
3. На второй модуль должно быть отведено не менее 50% баллов, отведённых на промежуточный контроль.
4. Суммарно на письменные контрольные работы за два модуля должно быть отведено не менее 50% баллов, отведённых на промежуточный контроль.

#### **VII. Материально-техническое обеспечение**

Учебные аудитории, оснащенные средствами мультимедиа.

#### **VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

№ п.п	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1.	Разделы III, IV, V.	Обновление содержания, ФОС, списка литературы	20.04.2023 г, протокол № 7
2.			