

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 09.09.2024 12:08:36  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Руководитель ООП

Шаров Г.С.



*Шаров*

08 » 05 2024 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## Численное моделирование в математической физике

Направление подготовки  
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование  
информационных систем

Профиль бакалавриата  
Математические основы информатики

Для студентов 4 курса бакалавриата

Форма обучения очная

Составитель: к.ф.-м.н. доцент И.Ш. Могилевский

Тверь, 2024

## I. Аннотация

Курс «Численное моделирование в математической физике» – традиционная часть образования математика. Также по установившейся традиции этот курс читается на завершающей стадии университетского образования. Уравнения в частных производных чрезвычайно широко используются для построения математических моделей самых разнообразных процессов и явлений. Поэтому знакомство основными идеями и методами теории уравнений в частных производных необходимо для формирования профессионала-математика.

### 1. Цели и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины «Численное моделирование в математической физике» являются:

- 1) фундаментальная подготовка в области уравнений с частными производными;
- 2) овладение аналитическими и численными методами математической физики для дальнейшего использования в приложениях.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Учебная дисциплина «Численное моделирование в математической физике» входит в вариативную часть блока, формируемого участниками образовательных отношений. Она является продолжением курса «Дифференциальных уравнений». Для ее успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения дисциплинам: математический анализ, дифференциальные уравнения, функциональный анализ и др.

**3. Объём дисциплины:** 5 зачетных единиц, 180 академических часов, в том числе:

**контактная аудиторная работа:** лекции 48 часов, практические занятия 55 часов,

**самостоятельная работа:** 77 часов, в том числе контроль 27 часов.

### 4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя её базовые составляющие

информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.2 Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи
ПК-1 Способен использовать базовые знания в области математических и естественных наук, программирования и информационных технологий	<p>ПК-1.1 Формулирует проблемы и определяет направление их решения на основе базовых знаний математики, естественных наук, программирования и информационных технологий</p> <p>ПК-1.2 С помощью стандартных методов решает типовые задачи в области математики, естествознания и информатики</p> <p>ПК-1.3 Применяет методы и приемы из области математики, физики и информатики для решения задач профессиональной деятельности</p>
ПК-2 Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-2.1 Проводит исследования под научным руководством, привлекая математику и информационные технологии

**5. Форма промежуточной аттестации** зачет в 7 семестре, экзамен в 8 семестре.

**6. Язык преподавания** русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Самостоятельная работа, в т.ч контроль	
		Лекции		Практические занятия			Контр. самост. работы
		всего	в т.ч. практ. подг.	всего	в т.ч. практ подгот		
1. Вывод уравнений колебаний струны, теплопроводности, Лапласа. Классификация уравнений второго порядка. Инвариантность типа уравнения при заменах независимых переменных. Характеристики уравнений второго порядка, их инвариантность при заменах независимых переменных. Метод характеристик.	12	4		2		6	
2. Канонический вид уравнения второго порядка, приведение уравнения к каноническому виду в случае двух независимых переменных и $n$ переменных. Общие решения уравнений. Решение задачи Коши для уравнения гиперболического типа на плоскости. Теорема Коши - Ковалевской.	14	4		4		6	
3. Волновое уравнение. Постановка задачи Коши и начально-краевых задач для него. Характеристический конус. Единственность решения задачи Коши и первой начально-краевой задачи для волнового уравнения.	13	4		4		5	
4. Решение задач Коши для волнового уравнения для $n = 1, 2, 3$ пространственных переменных. Формулы Даламбера, Кирхгоффа и Пуассона.	14	4		4		6	

5. Уравнение теплопроводности. Постановка для него задачи Коши и начально-краевых задач. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности и для волнового уравнения с помощью степенных рядов и интегральных формул..	22	4		9	2		9
6. Принцип максимума для уравнения теплопроводности, единственность решения первой начально-краевой задачи и задачи Коши в классе ограниченных функций.	14	4		3			7
7. Основные и обобщенные функции, регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, свертка обобщенных функций. Обобщенное решение уравнения, фундаментальное решение.	16	3		5			8
8. Преобразование Фурье обобщенных функций, вычисление с его помощью фундаментальных решений. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Формула Пуассона для решения задачи Коши.	17	4		6	2		7
9. Метод Фурье для уравнения гиперболического и параболического типов. Свойства собственных чисел и собственных функций задачи Штурма - Лиувилля. Решение методом Фурье начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.	14	4		4			6
10. Уравнения Лапласа и Пуассона, постановка краевых задач для уравнения Лапласа. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.	13	4		4			5
11. Гармонические функции. Интегральное представление гармонических функций. Теоремы о среднем, теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций.	10	3		4			3

12. Решение методом Фурье начально-краевых задач для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Решение методом Фурье краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона в круге или кольце.и шаре.	10	3		3			4
13. Единственность решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Необходимое условие разрешимости и единственность (с точностью до аддитивной постоянной) решения внутренней задачи Неймана. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, ее симметрия. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в n-мерном шаре при n=2,3. Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.	11	3		3			5
<b>ИТОГО</b>	<b>180</b>	<b>48</b>		<b>55</b>			<b>77</b>

### III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем (в строгом соответствии с разделом II РПД)	Вид занятия	Образовательные технологии
1. Вывод уравнений колебаний струны, теплопроводности, Лапласа. Классификация уравнений второго порядка. Инвариантность типа уравнения при заменах независимых переменных. Характеристики уравнений второго порядка, их инвариантность при заменах независимых переменных. Метод характеристик.	лекция  практическое занятие	активное слушание  форум

<p>2. Канонический вид уравнения второго порядка, приведение уравнения к каноническому виду в случае двух независимых переменных и <math>n</math> переменных. Общие решения уравнений. Решение задачи Коши для уравнения гиперболического типа на плоскости. Теорема Коши - Ковалевской.</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>традиционная лекция  мозговой штурм</p>
<p>3. Волновое уравнение. Постановка задачи Коши и начально-краевых задач для него. Характеристический конус. Единственность решения задачи Коши и первой начально-краевой задачи для волнового уравнения.</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>активное слушание  мозговой штурм</p>
<p>4. Решение задач Коши для волнового уравнения для <math>n = 1, 2, 3</math> пространственных переменных. Формулы Даламбера, Кирхгоффа и Пуассона.</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>традиционная лекция  форум</p>
<p>5. Уравнение теплопроводности. Постановка для него задачи Коши и начально-краевых задач. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности и для волнового уравнения с помощью степенных рядов и интегральных формул..</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>традиционная лекция  мозговой штурм</p>
<p>6. Принцип максимума для уравнения теплопроводности, единственность решения первой начально-краевой задачи и задачи Коши в классе ограниченных функций.</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>активное слушание  форум</p>
<p>7. Основные и обобщенные функции, регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, свертка обобщенных функций. Обобщенное решение уравнения, фундаментальное решение.</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>активное слушание  мозговой штурм</p>

<p>8. Преобразование Фурье обобщенных функций, вычисление с его помощью фундаментальных решений. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Формула Пуассона для решения задачи Коши.</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>традиционная лекция  форум</p>
<p>9. Метод Фурье для уравнения гиперболического и параболического типов. Свойства собственных чисел и собственных функций задачи Штурма - Лиувилля. Решение методом Фурье начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>традиционная лекция  мозговой штурм</p>
<p>10. Уравнения Лапласа и Пуассона, постановка краевых задач для уравнения Лапласа. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>активное слушание  форум</p>
<p>11. Гармонические функции. Интегральное представление гармонических функций. Теоремы о среднем, теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций.</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>традиционная лекция  мозговой штурм</p>
<p>12. Решение методом Фурье начально-краевых задач для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Решение методом Фурье краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона в круге или кольце и шаре.</p>	<p>лекция  практическое занятие</p>	<p>активное слушание  форум</p>



<p>13. Единственность решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Необходимое условие разрешимости и единственность (с точностью до аддитивной постоянной) решения внутренней задачи Неймана. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, ее симметрия. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в <math>n</math>-мерном шаре при <math>n=2,3</math>. Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.</p>	<p>лекция</p> <p>практическое занятие</p>	<p>активное слушание</p> <p>информационные технологии</p>
---	---	---

#### IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

##### Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций.

Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
<p>УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</p>	<p>Принцип Дирихле (с доказательством). Обобщенный принцип максимума. Единственность ограниченного решения обобщенной задачи Дирихле.</p>	<p>Уверенное владение, задание полностью выполнено – 7 баллов. Наличие отдельных ошибок – 3 – 6 баллов. Большое количество ошибок – 0 баллов.</p>
	<p>Свойства интеграла Пуассона. Гармоничность функции, представимой интегралом Пуассона. Гармоническая мера множества на единичной окружности, ее свойства.</p>	<p>Правильное выполнение задания – 6 баллов. Наличие отдельных ошибок – 3 – 5 баллов. Большое количество ошибок, решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.</p>

	<p>Определение гармонических функций. Примеры. Арифметические операции над гармоническими функциями, сохранение гармоничности при композициях с конформными и аффинными отображениями. Различные формы записи уравнения Лапласа</p>	<p>Глубокие знания – 4 балла.          Неуверенные знания – 2 – 3 балла.          Серьезные пробелы в знаниях, ошибки – 0 баллов</p>
--	---	--

<b>Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина</b>	<b>Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)</b>	<b>Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания</b>
ПК-1 Способен использовать базовые знания в области математических и естественных наук, программирования и информационных технологий	<p>Нахождение в аналитической форме решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными</p>	<p>Уверенное владение, задание полностью выполнено – 5 баллов.          Наличие отдельных ошибок – 3 балла.          Большое количество ошибок – 0 баллов.</p>
	<p>Построение в виде тригонометрических рядов решения краевых задач для уравнения Лапласа, начально-краевых задач для уравнений теплопроводности и волнового в случае двух независимых переменных.</p>	<p>Правильное выполнение задания – 5 баллов.          Наличие отдельных ошибок – 3 – 4 балла.          Большое количество ошибок, решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.</p>
	<p>Способы аппроксимации частных производных разностными отношениями, построение разностных схем для основных уравнений в частных производных</p>	<p>Глубокие знания – 4 балла.          Неуверенные знания – 2 – 3 балла.          Серьезные пробелы в знаниях, ошибки – 0 баллов</p>

## **V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **1) Рекомендуемая литература**

#### **а) основная литература**

1. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Кудряшов Н.А.. — Москва, Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2019. - 360 с. IPR SMART: <https://www.iprbookshop.ru/91910.html>.
2. Степучев, В. Г. Дифференциальные уравнения в частных производных : учебник для вузов / В. Г. Степучев. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 144 с. — ISBN 978-5-8114-7562-9. — Текст : электронный // ЭБС Лань: — URL: <https://e.lanbook.com/book/169798>.

#### **б) дополнительная литература**

3. Щербакова Ю.В. Уравнения математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Щербакова Ю.В., Миханьков М.А.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/6352.html>.— ЭБС «IPRbooks».
4. Алексеев А.Д. Уравнения с частными производными в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Алексеев А.Д., Кудряшов С.Н., Радченко Т.Н.— Электрон. текстовые данные.— Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009.— 80 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47167.html>.— ЭБС «IPRbooks».
5. Пичугин Б.Ю. Уравнения математической физики [Электронный ресурс]: курс лекций/ Пичугин Б.Ю., Пичугина А.Н.— Электрон. текстовые данные.— Омск: Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, 2016.— 180 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/59669.html>.— ЭБС «IPRbooks».

### **2) Программное обеспечение**

#### **а) Лицензионное программное обеспечение**

- Kaspersky Endpoint Security 10 (акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022)

#### **б) Свободно распространяемое программное обеспечение**

- Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО
- ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО

- Google Chrome бесплатное ПО
- Яндекс Браузер бесплатное ПО
- Octave Бесплатное ПО
- MiKTeX Бесплатное ПО, лицензионное соглашение: <https://miktex.org/>

### 3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com) ;
2. ЭБС «ЮРАИТ» [www.biblio-online.ru](http://www.biblio-online.ru) ;
3. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/> ;
4. ЭБС IPRbooks <http://www.iprbookshop.ru/>;
5. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>;
6. ЭБС BOOK.ru <https://www.book.ru/>
7. ЭБС ТвГУ <http://megapro.tversu.ru/megapro/Web>
8. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (подписка на журналы) [https://elibrary.ru/projects/subscription/rus\\_titles\\_open.asp?](https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp?) ;
9. Репозиторий ТвГУ <http://eprints.tversu.ru>
10. Научная библиотека МГУ <http://lib.mexmat.ru/>

## VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

### Перечень вопросов для подготовки к экзамену

1. Вывод уравнений колебаний струны, теплопроводности, Лапласа; физическая интерпретация краевых и начально-краевых задач для них.
2. Классификация уравнений второго порядка. Инвариантность типа уравнения при заменах независимых переменных.
3. Характеристики уравнений второго порядка, их инвариантность при заменах независимых переменных. Примеры характеристик для уравнений колебаний струны, теплопроводности.
4. Уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики уравнений второго порядка в случае двух независимых переменных.
5. Приведение уравнения гиперболического типа к каноническому виду в случае двух независимых переменных.
6. Приведение уравнений параболического и эллиптического типов к каноническому виду в случае двух независимых переменных.
7. Канонический вид линейного уравнения второго порядка, приведение уравнения с постоянными коэффициентами к каноническому виду в случае  $n$  переменных.

8. Задача Коши для уравнения с частными производными. Теорема Ковалевской.
9. Волновое уравнение. Постановка для него задачи Коши и начально-краевых задач, их физический смысл.
10. Единственность решения первой и второй начально-краевых задач для волнового уравнения. Интеграл энергии.
11. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.
12. Формула Даламбера (решение задачи Коши для уравнения колебаний струны).
13. Формула Кирхгоффа (решение задачи Коши для однородного волнового уравнения в трехмерном пространстве).
14. Формула Пуассона (решение задачи Коши для однородного волнового уравнения на плоскости).
15. Уравнение теплопроводности. Постановка для него задачи Коши и начально-краевых задач, их физический смысл.
16. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности и для волнового уравнения с аналитическими начальными условиями с помощью степенных рядов.
17. Теорема о максимуме и минимуме для однородного уравнения теплопроводности.
18. Единственность решения первой начально-краевой задачи и задачи Коши для уравнения теплопроводности.
19. Обобщенные функции: определение,  $\delta$ -функция, дифференцирование обобщенных функций. Обобщенное решение дифференциального уравнения, фундаментальное решение дифференциального оператора.
20. Преобразование Фурье обобщенных функций. Инвариантность пространства основных функций относительно преобразования Фурье, фурье-образ производной обобщенной функции, производная фурье-образа. Примеры: фурье-образ  $\delta$ -функции и ее производной.
21. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности (вывод с помощью преобразования Фурье).
22. Свойства фундаментального решения уравнения теплопроводности.
23. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и решение с его помощью задачи Коши для уравнения теплопроводности.
24. Задача Штурма - Лиувилля, возникающая при решении методом Фурье начально-краевых задач. Свойства собственных чисел и собственных функций задачи Штурма - Лиувилля.
25. Решение методом Фурье начально-краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов (без доказательства свойств собственных чисел и функций задачи Штурма - Лиувилля).
26. Постановка краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона. Гармонические функции, примеры.
27. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

28. Гармонические функции. Интегральное представление гармонических функций.
29. Теоремы о среднем для гармонических функций.
30. Теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций.
31. Единственность решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Необходимое условие разрешимости и единственность (с точностью до аддитивной постоянной) решения внутренней задачи Неймана.
32. Решение методом Фурье краевых задач для уравнения Лапласа в круге и кольце.
33. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в 3-мерном шаре.
34. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в 2-мерном круге.
35. Существование решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в 2-мерной области, сведение ее к задаче в круге с помощью конформного отображения.
36. Объемный (ньютоновский) потенциал, его существование, непрерывность, гармоничность в области без зарядов. Объемный потенциал, как решение уравнения Пуассона (Лапласа).
37. Поверхностные потенциалы простого и двойного слоя, их гармоничность.
38. Поверхностные потенциалы, предельные значения поверхностного потенциала двойного слоя.

#### Требования к рейтинг-контролю

*Осенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится на 9-10 учебной неделе по графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

*весенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится на 32-33 учебной неделе по графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

Максимальное количество баллов, которое может быть получено в результате освоения дисциплины составляет 100 баллов, из них 60 баллов отводится на текущий контроль (например, по 30 баллов на каждый модуль) и 40 баллов на зачет/экзамен.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

#### **VII. Материально-техническое обеспечение**

Учебные аудитории, оснащенные средствами мультимедиа.

### **VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1	Основные разделы	Приведение в соответствие новым требованиям	02.07.2022 прот протокол № 8 заседания кафедры функционального анализа и геометрии
2	Разделы III, IV, V	Обновление содержания, списка литературы	26.06.2023 протокол № 7 заседания кафедры функционального анализа и геометрии